روش حل مسائل هندسه

برای دانش آموزان دبیرستانها

و

دانشسراهای مقدماتی

تألیف :

ابوالقاسم قربانی — حسن صفاری

معلمان علوم ریاضی

چاپ دوم

بنگاه مطبوعاتی فریدون علمی

۱۳۴۵

چاپ پیمان

تلفن : ۳۸۶۳۲

بنام ایزد دانا

در دوجلد حل‌المسائل هندسه که تا کنون منتشر نموده ایم مقدار نسبتاً زیادی مسائل‌حل‌شدهٔ هندسه در اختیار دانش‌آموزان قرار داده وسیلهٔ تمرین وممارست در این علم را برای‌آنان فراهم کرده ایم .

اما ازآنجا که مسائل‌هندسه خیلی‌مختلف و متنوع است و نمیتوان دستوری جامع وکلی برای حل کردن همهٔ آنها ذکر نمود اغلب نوآموزان از یکطرف بعلت همین تنوع و ازطرف دیگر بواسطهٔ دشواری بعضی‌مسائل درابتدای‌کار دلسرد شده تصورمیکنند که برای فراگرفتن هندسه استعداد خاصی‌لازم است. ضمناً این‌نکته قابل انکارنیست که صرفاً با از برکردن مطالبی‌که درکتاب هندسه ذکرمیشود وبدون حل‌وبحث مسائل‌کافی نتیجه‌یی‌که از تدریس این علم منظور است عاید دانش‌آموزان نخواهد شد .

این ملاحظات مارا برآن داشت‌که تا آنجا که میسر است مسائل هندسهٔ مقدماتی را طبقه‌بندی‌کرده راههایی‌را که برای حل کردن هرطبقه ممکن است انتخاب‌کرد تذکر دهیم .

هرگز ادعا نمیکنیم‌که این‌کار دراین‌کتاب بطورکامل انجام گرفته باشد ولی بگمان ما مطالعهٔ آن کار حل‌المسائل هندسه را برای بسیاری از خوانندگان آسان خواهدکرد .

برای هریك از روشهایی‌که ذکرنموده‌ایم یك یا چند مسئله بطور نمونه حل کرده بلافاصله تمرینات متعدد برای همان روش نوشته‌ایم و با اینکه بعضی ازمسائل تمرینی را میتوان بطریقه‌های دیگرکه شاید آسانترهم باشند حل‌کرد چون مقصود اصلی ازاین

کتاب بدست آوردن روش منظم است توصیه میکنیم که هرمسئله را براهی که معین کرده ایم حل نمایند وبدانند که ما خود درحین نوشتن این کتاب متوجه بوده‌ایم که برای بسیاری ازتمرین‌ها راه حل‌های دیگری موجود است وبهمین‌مناسبت بعضی ازمسائل را چند جای مختلف ذکر کرده‌ایم ولی درهرمقام بکار بردن روش مورد بحث را درنظر داشته ایم .

تهران ـ اول شهریورماه ۱۳۲۹ شمسی

ابوالقاسم قربانی **حسن صفاری**



مقدمه

مسئلهٔ هندسه هرقدرهم که مختلط و پیچیده باشد مرکب از یك‌سلسله مسائل ساده است که میتوان آنها را بچهار دستهٔ متمایز تقسیم‌کرد از اینقرار :

۱ ــ مسائل مربوط بخاصیت های توصیفی اشکال .
۲ ــ مسائل مربوط بروابط متری بین اجزای یك شکل .
۳ ــ مسائل مربوط بمکانهای هندسی .
۴ ــ مسائل مربوط بترسیم هندسی اشکال .

۱ ــ خاصیت های توصیفی شکلها :

این خاصیت ها **وضع** یا **نوع** شکلهای هندسی یا اجزای آنها را نسبت بیکدیگر توصیف میکنند .

چند مثال : میدانیم‌که :

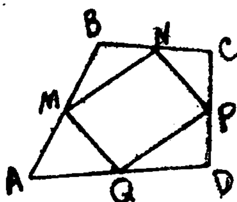
قطرهای هر لوزی برهم عمودند : وضع نسبی دو قطر

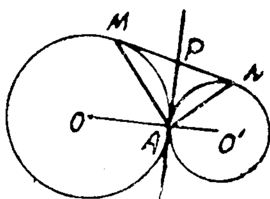
مماس هردایره‌برشعاعی‌که از نقطهٔ تماس‌میگذرد عمود است وضع نسبی مماس و شعاع

زوایای روبروی هرچهارضلعی‌محاطی مکمل یکدیگرند : نوع زوایا

اگر اوساط اضلاع متوالی یك‌چهار ضلعی‌را بهم وصل‌کنیم شکل حاصل متوازی‌الاضلاع است :

نوع چهارضلعی MNPQ





اگر دو دایرهٔ **O** و **O'** در نقطهٔ **A** مماس خارج باشند مماس خارجی آنها **MN** باپاره خط های **MA** و **NA** یك مثلث قائم‌الزاویه تشکیل میدهند .

نـوع مثلث **AMN** .

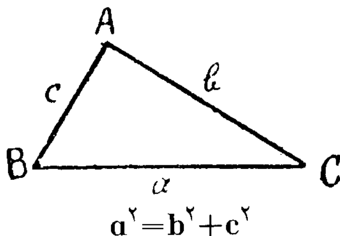
اگر مماس داخلی آنهارا رسم کنیم ازنقطهٔ **P** وسط **MN** میگذرد : وضع نسبی نقطهٔ **P** نسبت بنقاط **M** و **N**

نکتهٔ مهم اینست که این خاصیت ها را بدون اندازه گرفتن اجزای شکل ثابت میکنیم .

مثلا برای آنکه ثابت‌کنیم که دو قطر لوزی برهم عمودند احتیاج نداریم که‌طول اضلاع یا‌اندازهٔ زوایای‌لوزی را حساب‌کنیم فقط گاهی برای آنکه ثابت کنیم طول دو پاره خط یا اندازهٔ دو زاویه باهم برابرند آنهارا باهم مقایسه می‌کنیم .

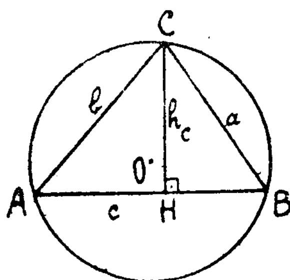
۲ ـ روابط متری ـ چند مثال :

درهرمثلث قائم‌الزاویه‌مربع‌اندازهٔ وترمساویست با مجموع مربعات اندازه‌های دوضلع دیگر .



$$a^{۲}=b^{۲}+c^{۲}$$

حاصلضرب دوضلع هرمثلث مساویست باحاصلضرب ارتفاع نظیر ضلع سوم در قطر دایرهٔ محیطی مثلث



$$a \times b = ۲R \times h_c$$

در اینقبیل مسائل باید متوجه بود که مثلا وقتی می‌گوییم حاصلضرب دوضلع مقصود حاصلضرب اندازه‌های آنهاست .

تقسیمات این کتاب

این کتاب که شامل سه بخش است. دربخش‌اول راهنماییها ونصایح کلی که برای‌حل‌مسائل‌مفیداست شرح داده ودربخش‌دوم‌روش حل‌مسائل مربوط بخاصیت‌های توصیفی شکلها را بدست داده‌ایم .

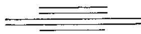
چون‌مسائل‌مربوط بخاصیت‌های‌متری شکلهای هندسی‌بیشتر مربوط بمحاسبات جبریست‌فقط دربخش سوم‌بعنوان‌نمونه وبرای‌بیان روشها کلی دونوع ازاین مسائل را مورد بحث قرارداده‌ایم.

علائم اختصاری :

چون دراین کتاب مکرر بکتابهای هندسه مراجعه شده است علائم اختصاری زیررا بکار بردیم :

(۷۰ : ح ۱) یعنی شمارهٔ ۷۰ جلد اول حل المسائل تألیف ما
(۲۵ : ح ۲) « « ۲۵ جلد دوم « « «

هر کجا مثلا کتاب سوم هندسه نوشته ایم مقصود کتاب هندسه تألیف خود ما برای سال سوم متوسطه میباشد .



فهرست مندرجات

بخش اول = راهنماییها و نصایح کلی

صفحه

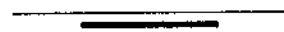
بخش دوم = مسائل مربوط بخاصیت‌های توصیفی اشکال

صفحه

صفحه

صفحه

بخش سوم = مسائل مربوط بخاصیت‌های متری شکلها



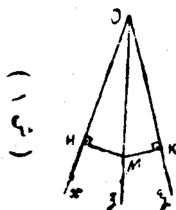
بخش اول

راهنماییها و نصایح کلی

الف ــ تشخیص حکم وفرض و استفاده از فرض :

۱ ـ اثبات یك قضیه یعنی نتیجه گرفتن حکم ازفرض بوسیلهٔ استدلال درقضیهٔ زیر :

« هرنقطه که روی نیمساز یك زاویه واقع باشد از دو ضلع آن بیك فاصله است »



فرض وحکم عبارتند از :

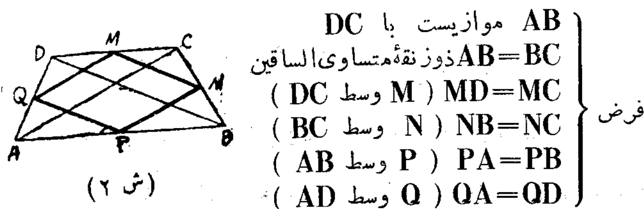
فرض { اگر نقطهٔ M روی نیمساز زاویهٔ xoy واقع باشد (ش ۱)

حکم { آنوقت نقطهٔ M از ox و oy بیك فاصله قرار دارد .

و باید حکم را از روی فرض نتیجه بگیریم . بنابراین قبل ازهرچیز باید بطور دقیق فرض وحکم را از هم تمیز داده هریك از آنها را مشخص نماییم .

بعلاوه درهر استدلال باید فرض را صحیح انگاشته حکم را ثابت کنیم. اگر در مثال فوق نقطهٔ M روی نیمساز oz نباشد دیگر از دوضلع زاویه بیك فاصله نخواهد بود . اما میدانیم‌که در مسائلی که درست طرح شده باشند فرض باندازهٔ لزوم ذکر شده است و فرضهای بیهوده‌یی وجود ندارد بنابراین باید در حین استدلال تمام فرض را بکار برد .

مثال - اگر اوساط اضلاع متوالی یك ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین را بهم وصل‌کنیم چهارضلعی حاصل لوزی است (ش ۲)



(ش ۲)

فرض:
AB موازیست با DC
AB=BC ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین
MD=MC (M وسط DC)
NB=NC (N وسط BC)
PA=PB (P وسط AB)
QA=QD (Q وسط AD)

حکم : MN=NP=PQ=MQ (MNPQ لوزی است)

قسمتی از فرض اینست که نقطهٔ **M** وسط پاره خط **CD** و نقطهٔ **N** وسط پاره‌خط **BC** و نقطهٔ **P** وسط پارهٔ خط **AB** و نقطهٔ **Q** وسط پاره خط **AD** است .

قبلا با استفاده از این‌قسمت ازفرض ثابت می‌کنیم که‌چهارضلعی **MNPQ** متوازی‌الاضلاع است . اما برای آنکه این متوازی‌الاضلاع لوزی باشد لازم است که مثلا **MQ** مساوی با **MN** باشد و برای این لازم است که داشته باشیم **AC = BD** و این مطلب را وقتی میتوان ثابت‌کرد که از قسمت دیگر فرض یعنی از اینکه **ABCD** یك ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین است استفاده کنیم .

ب - بکار بردن تعاریف

۲— مطلبی‌که باوجود سادگی‌اغلب بآن‌توجه نمیشود **تعریف** اصطلاحاتیست که درهندسه بکار می‌آیند .

درواقع ازیکطرف واضح است‌که نمیتوان دربارهٔموضوعهایی که کاملا تعریف نشده باشند استدلال نمود و ازطرف دیگر چه یك تعریف را ندانیم وچه آنرا بکار نبندیم نتیجه یکسان است .

برای توضیح باز مثال شمارهٔ قبل را درنظرمیگیریم .

« هرنقطه‌که روی نیمساز یك زاویه واقع باشد از دو ضلع

آن بیك فاصله است » بدواً باید ازخود بپرسیم :

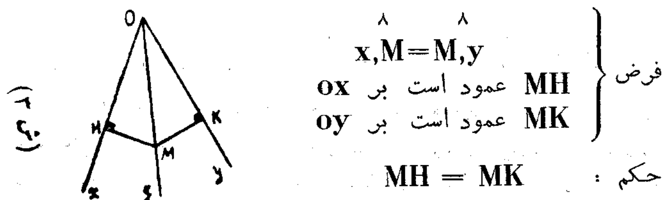
وقتی‌میگوییم MA نیمساز زاویهٔ xoy است مقصودچیست؟

جواب : یعنی MA زاویهٔ xoy را بدو قسمت متساوی تقسیم مینماید .

فاصلهٔ نقطهٔ M از خط ox یعنی چه ؟

جواب : فاصلهٔ نقطهٔ M از ox یعنی طول پاره‌خط عمودی که از M بر xo فرود آید .

بنابراین قضیهٔ فوق باینصورت نوشته میشود :



فرض:
$\hat{x,M} = \hat{M,y}$
MH عمود است بر ox
MK عمود است بر oy

حکم : MH = MK

امیدواریم با ذکر این‌مثال دستور زیر که **پاسکال** (۱) آنرا رکن اصلی منیق نامیده است باندازهٔ کافی روشن وواضح شده باشد.

باید تعریف را بجای چیزی که تعریف شده است قرار داد مثلا بجای آنکه بگوییم OM نیمساز زاویهٔ xoy است می‌گوییم زاویهٔ xoM با زاویهٔ Moy مساویست .

۳ــ تعریف یك اصطلاح را اغلب میتوان بصور مختلف بیان نمود و باید مابین این صور متفاوت آنرا که بیشتر برای منظورما مفید و راحت است اختیار نماییم .

مثلا بجای تعریفی که در فوق برای نیمساز زاویه نمودیم میتوان گفت که نیمساز زاویهٔ xoy نیم خطی است مانند oM که در

---

(۱) Pascal ریاضی دان و فیزیك دان و فیلسوف و نویسندهٔ فرانسوی (۱۶۲۳ ــ ۱۶۶۲ میلادی).

جهت معینی با ox زاویه‌یی مساوی با نصف زاویهٔ xoy تشکیل‌دهد (در قضیهٔ قبل همان بیان اول برای تعریف نیمساز مناسب‌تر است).

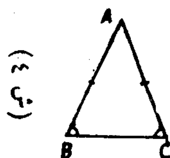
بعضی قضایای هندسه نیز بهمین طریق بما اجازه میدهند که بجای یك‌تعریف ، تعریف دیگری که با آن معادل است اختیارنماییم.

مثلا در هندسه ثابت کرده ایم که در مثلث متساوی‌الساقین دو زاویهٔ مجاور بقاعده باهم برابرند و بعکس

پس برای آنکه بیان‌کنیم‌که مثلث ABC متساوی‌الساقین‌است میتوانیم بنویسیم :

$$AB = AC$$

و نیز میتوانیم بنویسیم $\hat{B} = \hat{C}$



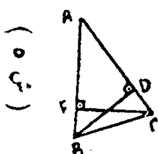
(ش ۴)

قاعده‌یی که در شمارهٔ قبل ذکر نمودیم یکی از مهمترین قاعده‌هایی است‌که دراین باب میتوان بیان‌کرد وبسیاری ازترسیمات فرعی ازهمین رو نتیجه میشوند . مثلا در ابتدای کتاب دوم هندسه هرجا میخواهیم در بارهٔ یك نقطه از دایره استدلال نماییم فوراً آن نقطه را بمرکز دایره وصل میکنیم . با توجه بآنچه گذشت واضح میشودکه این ترسیم کاملا طبیعی است و از تعریف دایره نتیجه می‌شود زیرا وقتی نقطهٔ M متعلق بدایرهٔ بمرکز O خواهدبودکه‌فاصلهٔ OM مساوی شعاع دایره باشد .

ج- ترجمهٔ حکم و فرض و تعاریف بزبان ریاضی

۴- پس از تشخیص حکم و فرض برای آنکه بهتر بتوان ازآنها استفاده نمود باید هروقت ممکن باشد آنها را بوسیلهٔروابط ریاضی‌بطور خلاصه نوشت: دو مثال زیر این‌موضوع‌را روشن‌مینمایند:

مثال ۱ — در هرمثلث متساوی‌الساقین ارتفاعات نظیر دو ساق باهم مساویند (ش ۵)



فرض اول : مثلث ABC متساوی‌الساقین است بجای آنکه بنویسیم « ABC متساوی‌الساقین است » مینویسیم :

AC=AB و یا نظر بشمارهٔ ۳ : $\hat{B}=\hat{C}$

فرض دوم : BD و CF ارتفاعات نظیر اضلاع AC و AB هستند

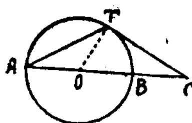
می‌نویسیم : $\widehat{BDC} = ۹۰^\circ$ و $\widehat{CFB} = ۹۰^\circ$

حکم : BD = CF

مثال ۲ - قطر AB از دایرهٔ بمرکز o را بطول BC مساوی با شعاع آن امتداد داده از نقطهٔ C مماس CT را بر دایره رسم مینماییم و نقطهٔ تماس را به A وصل‌میکنیم ثابت‌کنید‌که مثلث ATC متساوی‌الساقین است (ش ۶)

بدواً مینویسیم BC = R و نیز AB = oC = ۲R (یعنی AB از مرکز میگذرد و C بر امتداد AB واقع است)

بجای آنکه بنویسیم « CT بر دایره مماس است » بهتر است بنویسیم :



(ش ٦)

$$oT = R \text{ و } \widehat{oTC} = ۹۰^\circ$$

حکم : AT = TC و یا $\hat{A} = \hat{C}$

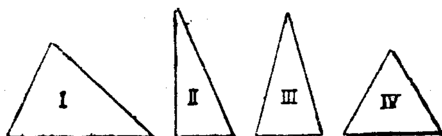
د ـ کشیدن شکل واضح وصحیح

۵ - شکل مربوط بهرمسئله را باید با کمال دقت بوسیلهٔ

خط‌کش و پرگار رسم نمود و این اشتباه است که تصور کنیم که همواره روی شکل غلط میتوان استدلال صحیح نمود. مخصوصاً بهتر است که معلومات و مجهولات (یا ساختمانهای فرعی) با رنگهای متفاوت یا بعضی را نقطه‌چین و برخی را با خط نقطه رسم نماییم و اجزای متساوی شکل نشان دهیم. خلاصه تا آنجا که ممکن باشد باید شرایطی را که درصورت مسئله قید شده است روی شکل واضح و آشکار نماییم و در ضمن اینکه در حل مسئله پیش میرویم روابط جدیدی را که صحت آنها ثابت میشود روی شکل ظاهر سازیم.

نکتهٔ بسیار مهمی‌را که باید در اینجا تذکر دهیم اینست که هرگز نباید شکل را بوضع خاصی که در صورت مسئله قید نشده است رسم کنیم.

مثلا اگر درصورت مسئله از مثلث غیرمشخصی گفتگو می‌شود باید مثلثی رسم نماییم که اضلاع آن باهم برابر نباشند (I ش ۷) و اگر دراین مورد مثلثی قائم‌الزاویه (II ش ۷) یا متساوی‌الساقین (III ش ۷) یا متساوی‌الاضلاع (IV ش ۷) رسم کنیم مرتکب اشتباهی میشویم که ممکن است ما را از حل مسئله باز دارد.

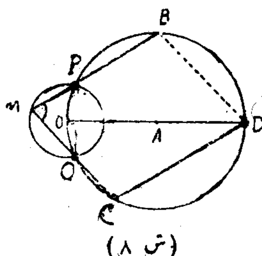


(ش ۷)

این نکته نیز جالب توجه است که در اغلب موارد شکل صحیح خودبخود روابطی راکه بین اجزای شکل موجود است بما نشان میدهد و حال آنکه شکل غلط درهمین مورد ما را بخطا وا میدارد.

بعبارت دیگر شکل صحیح غالباً خود راهنمایی برای رسیدن بحل مسئله است و مثال زیر این موضوع را روشن مینماید:

مثال- دایرهٔ بمرکز o و نقطهٔ A درخارج آن مفروض است دایرهٔ دیگری بمرکز A وشعاع AO رسم میکنیم تادایرهٔ اول‌را درنقاط P و Q وامتداد خط OA را درنقطهٔ D قطع نماید . سپس نقطهٔ اختیاری مانند M از دایرهٔ O را بنقاط P و Q وصل میکنیم تاخطوط حاصل دایرهٔ بمرکز A را بترتیب درنقاط B و C قطع نمایند. ثابت کنید MB=DC (ش۸)



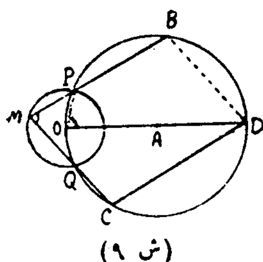
(ش ۸)

روی شکل صحیح فوراً دیده‌میشود که خطوط MB و CD باهم موازی‌هستند و خطوط MC و BD نیز همین حال را دارند پس متوجه میشویم که برای اثبات قضیه کافیست ثابت کنیم که شکل MBDC متوازی‌الاضلاع است

تبصرهٔ ۱ـــ اغلب اتفاق میفتد که روی شکل بعضی عناصر از قبیل نقاط یا زوایا یا پاره‌خطها برحسب وضع یا از حیث کمیت ثابت و تغییر ناپذیر هستند . در اینصورت باید عناصر ثابت را مشخص و روی شکل نشان نمود و توجه باین نکته نیز درمسئله‌مفید واقع میشود مثلا در مسئلهٔ قبل نقطهٔ M روی دایرهٔ O اختیاریست ومیتوان آنرا بطور دلخواه روی دایرهٔ مزبور انتخاب نمود و حال آنکه وضع نقاط B و C بستگی بوضع نقطهٔ M دارد. از طرف دیگر مقدار زاویهٔ M مادام‌که نقطهٔ M روی‌کمان PQ واقع و در خارج دایرهٔ A حرکت‌کند ثابت میباشد .

همین ملاحظات ما را متوجه مینمایندکه زاویهٔ محاطی B که اندازهٔ آن نصف کمان $\widehat{PQD}$ است (ش ۸ یا ۹) با زاویهٔ محاطی C که اندازهٔ آن نصف کمان $\widehat{QPD}$ است مساوی میباشد .

اکنون که تساوی دو زاویهٔ B و C محقق شد برای آنکه ثابت کنیم شکل MBDC متوازی‌الاضلاع است کافیست ثابت کنیم که زوایای M و B مکمل یکدیگر هستند . اما تا اینجا از این‌فرض که دایرهٔ A از نقطهٔ o میگذرد استفاده‌نکرده‌ایم پس طبق آنچه در شمارهٔ (۱) ذکرنمودیم با استفاده از این قسمت ازفرض است که‌باید ثابت‌کنیم زوایای M و B مکمل یکدیگرند .

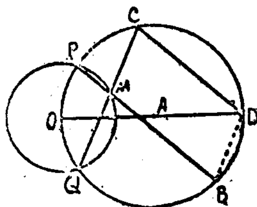


(ش ۹)

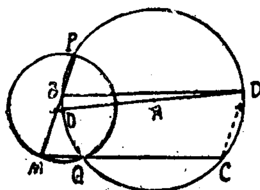
در نظرگرفتن همین موضوع بما تلقین می‌نماید که نقطهٔ o را بنقطهٔ P وصل نماییم و از آنجا تساوی زاویهٔ محاطی M با زاویهٔ مرکزی PoD (در دایرهٔ o) واضح میشود و چون زاویهٔ B در چهارضلعی محاطی BPoD (در دایرهٔ A) بازاویهٔ PoDمکمل‌است پس از آنجا نتیجه میشود که زوایای M و B نیز مکمل یکدیگرند

تبصرهٔ ۲ــ در موارد لازم باید حالات مختلفی را که ممکن است برحسب وضع‌نسبی عناصرشکل درمسئله پیدا شود درنظربگیریم

مثلا درمسئلهٔ قبل نقاط P و Q هریك از دو دایره را بدو کمان تقسیم می‌نمایند و میتوان نقطهٔ M را روی دایرهٔ o در خارج



(ش۱۱)



(ش۱۰)

دایرهٔ A (ش۹) یا در داخل‌آن اختیارنمود (ش ۱۱) ونیز برحسب موضع M روی کمان PQ ممکن است نقاط B و C هردو در خارج

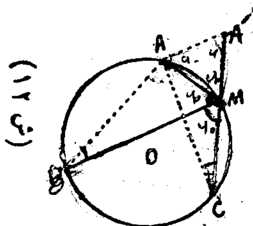
دایرهٔ O (ش ۹) یا یکی ازآنها در داخل و دیگری در خارج واقع شود (ش ۱۰) باید دقت نمود که آیا استدلالی که برای اثبات قضیه بکار برده‌ایم درتمام این موارد صحیح هست یا نه.

هـ - دستکاری و تصرف درشکل مسئله

۶ - غالباً شکلی‌که از روی صورت مسئله رسم میشود برای رسیدن بحل آن کافی نیست: باید خطوط جدیدی رسم‌کرد تا روابط جدیدی بدست آید. این خطوط جدید را طوری رسم مینماییم که اجزای معلوم شکل بهم نزدیك شوند یا مقایسهٔ اجزای مختلف شکل باهم آسان‌گردد مثلا خطوطی موازی با خطوط معلوم شکل یا عمود برآنها رسم میکنیم یا طولهای معلوم شکل‌را باندازه‌های معینی امتداد می‌دهیم یا روی آنها طولهای معلوم‌را جدا مینماییم تامجموع یا تفاضلی که در صورت مسئله قید شده است روی شکل ظاهر شود همچنین اغلب اوقات وقتی دو دایره باهم مماس باشند برای مقایسهٔ زوایای شکل با یکدیگر رسم‌کردن مماس مشترکی که ازنقطهٔ تماس آنها میگذرد مفید میباشد.

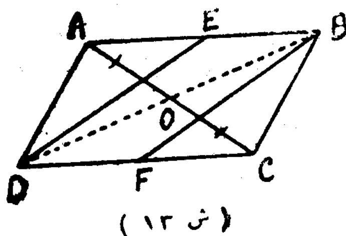
مثال ۱- دایره‌یی بمرکز O را بوسیلهٔ‌سه‌نقطهٔ A وB وC بسه‌کمان متساوی تقسیم نموده روی دایره نقطهٔ M را مابین A و C اختیارمیکنیم. ثابت کنیدکه وتر MB مساوی با مجموع دو وتر MA وMC میباشد (ش ۱۲)
(مقایسه‌کنید با شمارهٔ ۱۶۴: ح ۱)

چون درصورت‌مسئله ازمجموع MA+MC گفتگو میشود وتر MC را از طرف M باندازهٔ MA مساوی باMAامتداد میدهیم‌باین‌ترتیب CA'=MA+MC روی شکل ظاهر میشود سپس مثلثهای C'AC و MAB را بارسم‌کردن پاره‌خطهای AC و'AA وAB کامل میکنیم. باقی میماند که‌ثابت کنیم این دو مثلث متساویند.



خطوط جدید ممکن است خطوط مهمی از شکل باشند (میانه یا ارتفاع مثلث و قطر چند ضلعی یا دایره و شعاعی که ازنقطهٔ تماس خط و دایره میگذرد و غیره) و نیز ممکن است این خطوط آنهایی باشند که نقاط مهمی را بهم وصل می‌نمایند (خط واصل بین اوساط دوضلع مثلث یا دو ساق یك ذوزنقه وغیره).

> **مثال ۲-** در متوازی‌الاضلاع **ABCD** رأس **D** را بنقطهٔ **E** وسط ضلع **AB** و رأس **B** را بنقطهٔ **F** وسط ضلع **DC** وصل می‌نماییم. ثابت کنید که خطوط **DE** و **BF** قطر **AC** را بسه قسمت متساوی تقسیم مینمایند (ش ۱۳)



(ش ۱۳)

قطر **DB** ازمتوازی‌الاضلاع را رسم میکنیم) یکی از خطوط مهم شکل (اگر خاصیت نقطهٔ تقاطع سه میانهٔ یك مثلث را دربارهٔ مثلثهای **ADB** و **DCB** درنظر گیریم فوراً بنتیجه میرسیم.

برای حل‌دیگری‌ازهمین مسئله بشمارهٔ ۵۷ : ح ۱) مراجعه نمایید - بتمرین ۵۵ همین‌کتاب نیز مراجعه‌کنید.

بعداً خواهیم دید که این‌رویه : (نزدیك‌کردن اجزای شکل بیکدیگر) چقدر درمسائل‌ساختمان هندسی بکارمیرود. برای مثالهای دیگری بشماره‌های ۵۳ و ۶۴ و ۶۵ و ۶۹ (ح ۱) مراجعه کنید.

و - تذکرمهم

برای تکمیل راهنماییهای فوق اضافه میکنیم :

۷ - باید دقت کرد که درحین استدلال از آنچه باید ثابت

کنیم استفاده ننماییم و بطور مستقیم یا غیرمستقیم حکم‌را بکار نبریم.

مثال - در مثال ۱ شمارهٔ ۶ برای آنکه تساوی دو مثلث A'AC و MAB را ثابت‌کنیم نباید سهواً از تساوی A'C و BM استفاده‌کنیم زیرا این حکم مسئله است یعنی چیزیست‌که باید ثابت کرد.

راهنماییها و نصایح این بخش را میتوان بطور خلاصه چنین بیان‌کرد:

برای حل‌کردن مسئله باید:

اول - صورت مسئله را با دقت مطالعه‌کنیم و حکم و فرض یا معلوم و مجهول را بطورکامل معین‌کرده آنها را بزبان ریاضی بنویسیم.

دوم - درضمن مطالعهٔ صورت مسئله شکل مربوط بآن را با دقت بوسیلهٔ خط‌کش وپرگار بکشیم وروی شکل اجزای متساوی را بوسیلهٔ علائم مشخص‌نماییم و اجزای ثابت و متغیررا نشان‌کنیم.

سوم - ازکشیدن شکل مسئله بطور خاصی که در صورت مسئله قید نشده است خودداری نماییم.

چهارم - بوسیلهٔ رسم کردن خطوط جدید اجزای شکل را درصورت لزوم بهم نزدیک‌کنیم.

پنجم - تعاریف را بطور صحیح بکار برده هر تعریف را بجای چیزی که تعریف شده است قرار دهیم.

ششم - در ضمن استدلال ازتمام فرض استفاده‌کنیم.

هفتم - درحین استدلال از آنچه باید ثابت کنیم استفاده نکنیم .

هشتم - حالات خاصی که ممکن است برحسب وضع نسبی عناصر شکل روی دهد درنظر بگیریم .



بخش دوم

مسائل مربوط بخاصیت‌های توصیفی اشکال

فصل اول

چگونه ثابت کنیم که دو پاره خط متساویند ؟

این یکی از مسائل ساده‌یی است که غالباً بآن برمیخوریم زیرا گذشته ازمواردی که در آن مستقیماً از تسادی دو پاره‌خط گفتگو میشود درموقعی که میخواهیم تساوی، دومثلث یا دوچندضلعی را نشان دهیم یا اینکه ثابت کنیم که یك چهارضلعی متوازی‌الاضلاع یا لوزی یا مستطیل یا مربع است یا در موقع اثبات اینکه چند نقطه روی یکدایره واقع هستند یا یك چندضلعی منتظم است وغیره این‌مسئله بکار می‌آید .

۸ ــ روش اول ـ بوسیلهٔ انطباق دو پاره خط ـ تقارن‌محوری

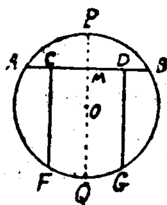
این همان طریقه‌یی است که ازتعریف تساوی دو پاره خط نتیجه می‌شود ودر کتاب اول هندسه برای آنکه ثابت کنیم «نیمساز زاویهٔ رأس هرمثلث متساوی‌الساقین قاعدهٔ آنرا بدوقسمت متساوی تقسیم مینماید» آنرا بکار برده‌ایم .

این‌طریقه‌درمسائل هندسه غالباً بصورت دیگری‌بکارمیآید :

دو پاره‌خط که‌نسبت بیك محور قرینهٔ یکدیگر باشندمتساویند.

چون بطور کلـی بوسیلهٔ انطباق ثابت کرده‌ایم که هرگاه دوشکل نسبت بیك محور قرینهٔ یکدیگر باشند متساویند درمسائل هندسه بجای انطباق دو پاره خط تقارن آنها را نسبت بیك‌محور بکا می‌بریم .

مثال - روی وتر AB از دایرهٔ O دو نقطهٔ C و D را بیك فاصله از نقطهٔ M وسط AB اختیار نموده (ش ۱۴) از این دو نقطه دو عمود بر خط AB اخراج میکنیم تا یکی از دو کمان AB را بترتیب در نقاط F و G قطع نمایند. ثابت کنید CF=DG



(ش ۱۴)

فرض:
$AM = MB$ (۱)
$MC = MD$
$CF \perp AB$
$DG \perp AB$

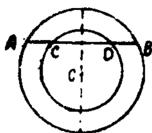
حکم: $CF = DG$

حل - قطر PQ از دایره را که از نقطهٔ M میگذرد رسم می‌نماییم. این قطر که از وسط AB میگذرد (فرض ۱) بر AB عمود است و محور تقارن شکل میباشد (بعبارت دیگر اگر شکل را حول خط PQ تا کنیم قسمت سمت راست آن کاملا بر قسمت سمت چپ منطبق می‌گردد: نقطهٔ B روی نقطهٔ A و نقطهٔ D روی نقطهٔ C و امتداد DG بر CF نیمدایرهٔ ABN روی نیمدایرهٔ AFN و بالاخره نقطهٔ G روی نقطهٔ F میفتد) بنابراین چون دو پاره‌خط DG و CF نسبت بمحور PQ قرینهٔ یکدیگرند باهم مساوی می‌باشند.

تمرینات

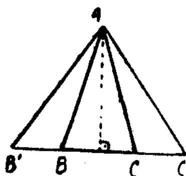
مسائل زیررا بهمین طریقه حل کنید :

۱ ـ خطی رسم می‌کنیم که دو دایرهٔ متحدالمرکز را قطع کند ونقاط تقاطع آنرا بادایرهٔبزرگتر A و B و یا دایرهٔ کوچکتر C و D مینامیم ثابت کنید که $AC=BD$ و $AD=BC$ (قطر عمود بر AB را رسم کنید ـ شمارهٔ ۱۱۳ : ح ۱ .



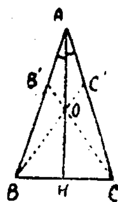
(ش ۱۵)

۲ ـ مثلث متساوی‌الساقین ACB ($AB=AC$) را درنظر گرفته قاعدهٔ BC را از طرفین باندازهٔ دو طول متساوی 'BB و 'CC امتداد میدهیم . ثابت کنید که مثلث 'AB'C متساوی‌الساقین است . (ارتفاع وارد بر BC را رسم کنید ـ مقایسه کنید با شمارهٔ ۱۱ : ح ۱)



(ش ۱٦)

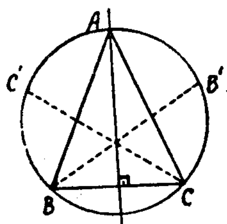
۳ ـ مثلث متساوی‌الساقین ABC ($AB=AC$) را در نظر گرفته نقطهٔ O را روی نیمساززاویهٔ A اختیار میکنیم و BO و CO را رسم نموده امتداد میدهیم تا بترتیب AC و AB را در 'C و 'B قطع نمایند. ثابت کنید $BB' = CC'$ (مقایسه کنید با شمارهٔ ۱۲ : ح ۱)



(ش ۱۷)

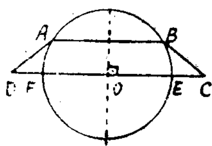
۴ - مثلث متساوی‌الساقین ABC (AB=AC) را در نظر گرفته نیمسازهای دو زاویهٔ B و C را رسم مینماییم تا دایرهٔ محیطی مثلث را در نقاط B′ و C′ قطع نمایند . ثابت کنید

$$CC'=BB'$$



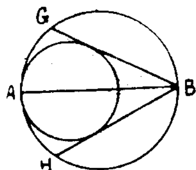
(ش ۱۸)

۵ - ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین ABCD (AD=BC) را در نظر گرفته بمرکز o وسط قاعدهٔ DC و بشعاع oA دایره‌یی رسم میکنیم تا همین قاعده (یا امتدادآن) را در نقاط E و F قطع کند ثابت کنید DF = EC و AF=EB



(ش ۱۹)

٦ - دو دایره باهم درنقطهٔ A مماس داخل هستند قطر AB دایرهٔ بزرگتر را رسم کرده از نقطهٔ B دو مماس بر دایرهٔ کوچکتر رسم می‌نماییم تا دایرهٔ بزرگتررا در نقاط G و H قطع کنند . ثابت کنید BG = BH



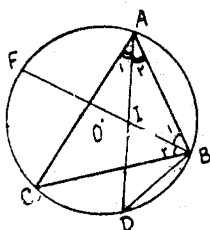
(ش ۲۰)

۹ـ روش دوم ـ بوسیلهٔ خواص مثلث متساوی‌الساقین

میدانیم‌که « اگر درمثلثی دو زاویه باهم برابر باشند آن مثلث متساوی‌الساقین است » بنابراین برای آنکه ثابت کتیم دو

پاره‌خط باهم‌برابر هستند اگر آندو پاره‌خط دریك سرمشترك باشند ثابت‌میکنیم که‌این‌دو پاره‌خط دوساق‌یک‌مثلث متساوی‌الساقین‌هستند. و نیزمیتوان ازاینکه « درمثلث‌متساوی‌الساقین نیمساز و ارتفاع و میانهٔ نظیر قاعده برهم منطبق هستند « استفاده کرد باین طریق که اگر دو پاره‌خط در یک سرمشترك بوده روی یک خط راست‌واقع باشند ثابت‌میکنیم که‌این‌دوپاره‌خط باهم‌قاعدهٔ‌مثلث متساوی‌الساقینی را تشکیل میدهند که سرمشترك آنها پای ارتفاع یا نیمساز یا میانهٔ نظیر قاعدهٔ آنست (مثال ۲ همین شماره) .

مثال ۱ - مثلث ABC و دایرهٔ محیطی آنرا در نظرگرفته نیمساز دو زاویهٔ **A** و **B** را رسم میکنیم تا یکدیگررا درنقطهٔ **I** و دایره را بترتیب در نقاط **D** و **F** قطع کنند ثابت کنید **DI=DB**



(ش ۲۱)

فــرض

$$\hat{A}_1 = \hat{A}_2 \qquad (۱)$$

$$\hat{B}_1 = \hat{B}_2 \qquad (۲)$$

حکم : **DI=DB**

حل- نقطهٔ **B** را به **D** وصل می‌کنیم کافیست ثابت کنیم‌که دو زاویهٔ **IBD** و **IDB** باهم برابرند .

اندازهٔ زاویهٔ محاطی**FBD** مساوی‌نصف‌اندازهٔ‌کمان‌روبروی آن $\widehat{FD}$ میباشد :

$$\frac{\text{اندازهٔ } \widehat{CD} + \text{اندازهٔ } \widehat{FC}}{۲} = \frac{\text{اندازهٔ } \widehat{FD}}{۲} = \text{اندازهٔ } \widehat{FBD}$$

و اندازهٔ زاویهٔ **DIB** که رأس آن داخل دایره واقع است مساوی است با نصف مجموع اندازه های دوکمان **DB** و **AF**

$$\text{اندازهٔ } \hat{DIB} = \frac{\text{اندازهٔ } \widehat{DB} + \text{اندازهٔ } \widehat{AF}}{۲}$$

اما نظر بتساویهای (۱) و (۲) چون دو زاویهٔ B_1 و B_2 باهم برابر هستند داریم :

$\widehat{FC}=\widehat{AF}$ (۳) و چون زوایای A_1 و A_2 برابرهستند داریم:

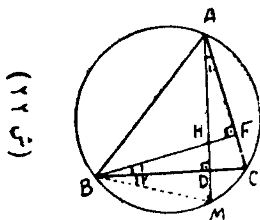
$\widehat{DB}=\widehat{CD}$ (۴) ازجمع طرفین روابط (۳) و (۴) حاصل‌میشود

$$\widehat{FC}+\widehat{CD}=\widehat{AF}+\widehat{DB}$$

و از آنجا نتیجه میشود : $\hat{FBD}=\hat{DIB}$

یعنی مثلث DIB متساوی‌الساقین است و $DI=DB$

مثال ۳ - مثلث ABC و دایرهٔ محیطی آنرا در نظر گرفته دو ارتفاع AD و BF را رسم میکنیم تا یکدیگر را در نقطهٔ H قطع کنند و سپس ارتفاع AD را امتداد میدهیم تا دایره را در نقطهٔ M تلاقی کند. ثابت کنید $HD=DM$ (مقایسه کنید باشمارهٔ ۱۶۵ :ح ۱)



فرض $\begin{cases} BC \perp AD \\ AC \perp BF \end{cases}$

حکم : $HD=MD$

حل ــ نقطهٔ B را به M وصل میکنیم دو زاویهٔ محاطی A_1 و B_2 که روبروی یك کمان ($\widehat{MC}$) هستند باهم برابرند پس $\hat{A}_1 = \hat{B}_2$ از طرف دیگر دو زاویهٔ A_1 و B_1 مردو متمم زاویهٔ C هستند بنابراین متساویند (دومثلث قائم‌الزاویهٔ ADC و BFC را در نظر بگیرید) پس $\hat{B}_1 = \hat{A}_1$ از این دو تساوی نتیجه می‌شود $\hat{B}_1 = \hat{B}_2$ بنابراین مثلث MBH که در آن BD هم نیمساز زاویهٔ B و هم ارتفاع نظیر ضلع MH است متساوی‌الساقین میباشد (۸ : ح ۱) و داریم $DH = DM$

تمرینات

۷ــ ثابت کنیدکه اگر یك زاویه از مثلث قائم‌الزاویه ۳۰ درجه باشد ضلع روبروی آن مساوی با نصف وتر است

تبصره ــ این‌خاصیت درحل بسیاری ازمسائل بکارمیآید

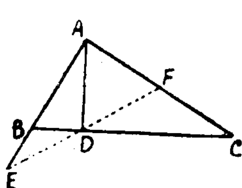
راهنمایی ــ قرینهٔ وتر را نسبت بضلع زاویهٔ ۳۰ درجه رسم کنید .

۸ــ ثابت کنید هرمثلث که در آن میانهٔ نظیر یك ضلع نصف همان ضلع باشد قائم‌الزاویه است .

۹ــ درمثلث ABC زاویهٔ حادهٔ B دوبرابرزاویهٔ C است. ارتفاع AD را رسم کرده AB را بطول BE مساوی با BD امتداد می‌دهیم و ED را وصل میکنیم تا AC را درنقطهٔ F قطع کند . ثابت کنید :

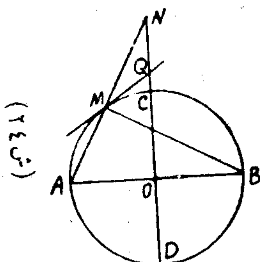
$DF = AF = FC$

(شمارهٔ ۴۳ : ح ۱)



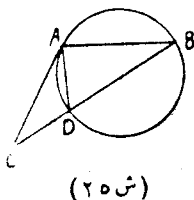
(ش۲۳)

۱۰- در دایره‌یی بمرکز O دو قطر عمود برهم AB و CD را رسم کرده نقطه‌یی مانند M از دایره‌را بنقاط A و B وصل میکنیم و مماس درنقطهٔ M بردایره را نیز میکشیم. خطوط MA و MB و مماس در نقطهٔ M بترتیب خط CD را در نقاط N و P و Q قطع مینمایند ثابت کنید NQ=QM=QP



(ش۲٤)

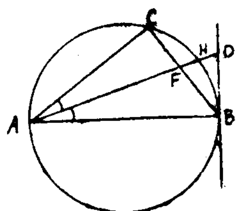
۱۱- یك دایره ووتر AB از آن و مماس در نقطهٔ A بر آنرا درنظر گرفته روی‌مماس پاره‌خط AC را مساوی وتر AB اختیار می‌نماییم و CB را رسم میکنیم تادایره را در نقطهٔدیگر D قطع کند. ثابت کنید:
(۱ح: ۱۴۹) DC=DA



(ش۲۵)

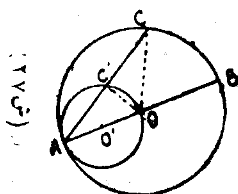
۱۲- دایره‌یی بقطر AB مفروض است وتر دلخواه AC و نیمساز زاویهٔ CAB را رسم میکنیم. این نیمساز وتر BC را درنقطهٔ F و دایره را درنقطهٔ H ومماسی راکه بردایره درنقطهٔ B رسم‌شود درنقطهٔ D قطع منیماید ثابت کنید:

FH=HD و BD=BF



(ش۲٦)

۱۳- دایره‌یی بقطر AB و بمرکز o مفروض است

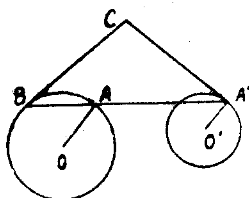


(ش ۲۷)

دایرهٔ دیگری بقطر AO رسم نموده از نقطهٔ A خطی میکشیم که دایرهٔ بزرگتررا در نقطهٔ C و دایرهٔ کوچکتر را در نقطهٔ C' قطع کند ثابت کنید

$$AC' = CC'$$

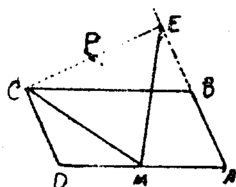
۱۴- دو دایره بمراکز O و O' و دو شعاع متوازی A و O'A' ازآنهارارسم‌مینماییم خط AA' دایرهٔ O را در نقطهٔ دیگری، مانند B قطع می‌کند. در نقطهٔ B مماسی بردایرهٔ O و در نقطهٔ A' مماسی بر دایرهٔO' رسم‌میکنیم. ایندو مماس‌یکدیگر را در نقطهٔ C قطـــع می‌نمایند. ثابت کنید $CB = CA'$
(۱ ح : ۱۵۴)



(ش ۲۸)

۱۵- در متوازی‌الاضلاع ABCD زاویهٔ A حاده است ارتفاع CE را برضلع AB فرود آورده نقاط E و C را بتقطهٔ M وسط AD وصل مـــی‌کنیم ثابت کنید $ME = MC$

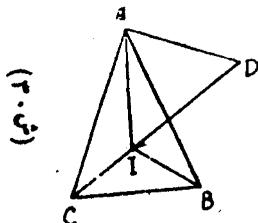
راهنمـــایـــی - M را بنقطهٔ P وسط CE وصل کنید.



(ش ۲۹)

۱۶- درمثلث متساوی‌الساقین ABC (AB = AC)

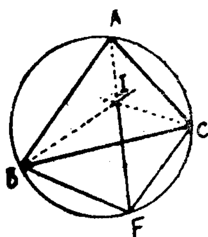
محل تلاقی نیمسازهای دو زاویهٔ B و C را نقطـهٔ I و محل تلاقی نیمساز زاویهٔ C را باخطی که از نقطهٔ A عمود بـر AC رسم شود نقطهٔ D مینامیم. ثابت کنید AI=AD (۸۱ : ح۱)



(ش۳۰)

۱۷- درمثلث ABC نیمسازها یکدیگر را در نقطهٔ I و نیمساز زاویهٔ A دایرهٔ محیطی مثلث را در نقطهٔ F قطع می‌کند ثابت کنید FB=FC=FI
(۱ ح : ۴۶۲)

راهنمایی- اندازهٔ هریك از دو زاویهٔ FIB و FBI مساوی نصف مجموع زوایای A و B است.



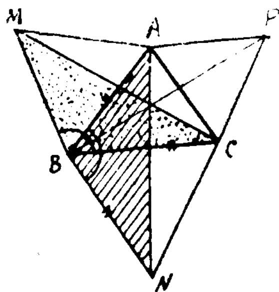
(ش۳۱)

۱۰- روش سوم - بوسیلهٔ مثلث های متساوی

این روش ازهمه بیشتر بکار میرود و باید چگونگی آنرا خوب بخاطرسپرد. دراین روش غالباً ازخاصیت زیر استفاده میشود:
اگر دو مثلث متساوی باشند اضلاع متقابل بزوایای‌متساوی آنها باهم برابرند.

برای بکاربردن این‌خاصیت باید سعی‌کنیم مثلث‌هایی بدست آوریم که دو پاره خطی که میخـواهیم تساویشان را ثـابت کنیم دو ضلع آنها باشند و تساوی این دومثلث را ازروی اجزای دیگرشان ثابت کنیم.

مثال ۱ــ روی اضلاع مثلث ABC و درخارج آن سه مثلث متساوی الاضلاع MAB و NBC و PAC را میسازیم . ثابت کنید $MC=NA=PB$



(ش ۳۲)

فــرض:
$$MA=M\quad=AB$$
$$NB=NC=BC$$
$$PA=PC=AC$$

حــکم : $MC=NA=PB$

حلــ برای اثبات اینکه $MC = NA$ دو مثلث MBC و ABN را در نظر میگیریم در این دو مثلث داریم :

$MB=AB$ و $BC=BN$ و $\hat{MBC}=\hat{ABN}$ (زیــرا هریك از این دو زاویه مساوی با $\hat{ABC}+۶۰^\circ$ میباشد پس این دو مثلث بنا بتساوی دوضلع و زاویهٔ بین آنها باهم مساویند و لذا داریم :

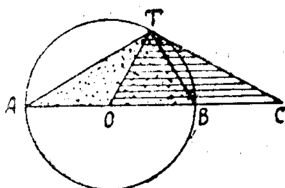
$$MC=NA$$

صحت تساوی $NA=PB$ بهمین قسم ثابت میشود .

***

ممکن است که دو پاره خطی که باید تساویشان را ثابت کنیم روی شکل مستقیماً اضلاع مثلث‌های متساوی نباشند . در این‌صورت غالباً می‌توان با رسم کردن خطوط فرعی مثلث هایی متساوی تشکیل داد که پاره خط های مزبور اضلاع آنها باشند .

مثال۲ــ قطر AB یك دایرهٔ بمرکز O را بطول BC مساوی با شعاع آن دایره امتداد میدهیم وازنقطهٔ C مماس CT را بر دایره رسم میکنیم . ثابت کنید
TA=TC



(ش۳۳)

فرض $\begin{cases} OA=OB=BC=OT \\ \widehat{CTO}=90^\circ \end{cases}$

حکم : AT=TC

حل ــ شعاع OT ووتر TB را رسم نموده دو مثلث OTC و BTA را در نظر میگیریم . ایندو مثلث هر دو در رأس T قائم‌ـ الزاویه‌هستند) زیرا از یکطرف شعاع‌آنOT برمماس TC عموداست و از طرف دیگر زاویهٔ ATB محاط درنیمدایره میباشد) و وترآنها باهم برابر است : OC=AB=۲R از طرف دیگر درمثلث قائم‌ـ الـزاویهٔ OTC میانهٔ TB نصف وتر یعنی مساوی با R است پس : TB=OT=R و بنا براین دومثلث مزبور (درحالت وتر ویك ضلع) متساوی میباشند و داریم AT=TC

تمرینات

۱۸ــ ثابت کنید درمثلث متساوی‌الساقین میانه‌های نظیر دو ساق باهم و دو نیمساز زوایای مجاور بقاعده باهم مساویند (۶ و ۷ : ح ۱)

۱۹ــ ثابت کنید هر مثلث‌که در آن یك ارتفاع و یك نیمساز برهم منطبق باشند متساوی‌الساقین است (۸ : ح ۱)

۲۰ــ ثابت کنیدهرمثلث که درآن یك‌ارتفاع و یك میانه

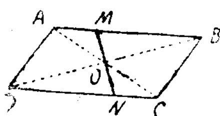
برهم منطبق باشند متساوی‌الساقین است (۹ : ح ۱)

۲۱ـــ تمرین های شمارهٔ ۲ و ۳ همین کتاب را با روش سوم حل کنید .

۲۲ـــ ثابت کنید کــه در مثلث ABC رؤس B و C از میانهٔ نظیر رأس A بیك فاصله هستند (۲۲ : ح ۱)

۲۳ـــ ثابت کنید اگر درمثلثی دو ارتفاع باهم مساوی باشند آن مثلث متساوی‌الساقین است (۲۳ : ح ۱)

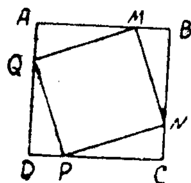
۲۴ـــ ثابت کنید هر پاره خط که از نقطهٔ O محل تلاقی دو قطر یك متوازی‌الاضلاع رسم‌شود وبدوضلع‌متوازی‌آن محدود باشد در نقطهٔ O نصف میشود (۴۸: ح ۱)



(ش ۳٤)

۲۵ـــ ثابت کنید هرگاه درمثلثی دومیانه متساوی‌باشند آن مثلث متساوی‌الساقین است (۸۴ : ح ۱)

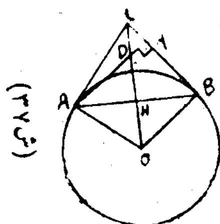
۲٦- روی اضلاع AB و BC و CD و DA از مربع ABCD بترتیب طولهای AM و BN و CP و DQ را دریك جهت دوران جدا میکنیم ثابت کنید چهار ضلعی MNPQ مربع است .



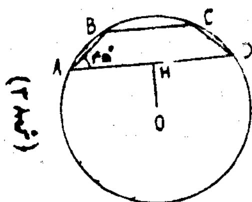
(ش۳۵)

۲۷ - ثابت کنید دوقطر هر ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین باهم مساویند .

۲۹- مماسهایی که در دونقطهٔ A وB ازدایره‌یی بمرکز o بر آن رسم شوند یکدیگر را در نقطهٔ C قطع می‌کنند و عمود مرسوم از A بر CB خط OC را درنقطهٔ D قطع می‌نماید ثابت کنید AD مساوی است با شعاع دایره (۱۵۷ : ح ۱)



۳۰ - ذوزنقهٔ ABCD در دایره‌یی محاط است . زاویهٔ A از آن که مجاور بقاعدهٔ بزرگتر است مساوی ۴۵ درجه میباشد ثابت کنید که قاعدهٔ کوچکتر مساویست با دو برابر فاصلهٔ مرکزدایره از قاعدهٔ بزرگتر .



راهنمایی - oA را وصل کنید و ازo عمودی بردوقاعده رسم نمایید .

۱۱ - روش چهارم - بوسیلهٔ خواص متوازی‌الاضلاع

از خواص زیر استفاده می‌کتیم :

الف ــ اضلاع روبروی هرمتوازی‌الاضلاع باهم برابرند .

ب ــ اقطار هرمتوازی‌الاضلاع یکدیگر را نصف میکنند .

ج ــ دو قطر هرمستطیل یا هر مربع باهم مساویند .

برای بکاربردن خاصیت اول باید بوسیلهٔ کشیدن شکل‌صحیح

متوازی‌الاضلاعی بدست آوریم که دوپاره‌خطی که می‌خواهیم تساویشان را ثابت نماییم اضلاع مقابل آن باشند (مثال ۱)

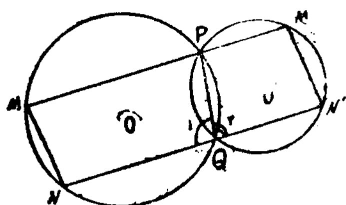
خاصیت دوم‌را موقعی میتوان‌بکار برد که بخواهیم ثابت‌کنیم یك نقطه وسط یك پاره خط است (مثال ۲)

برای استفاده ازاین روش باید بدانیم چگونه میتوان ثابت کرد یك شکل متوازی‌الاضلاع است :

یك چهارضلعی محدب متوازی‌الاضلاع است هرگاه :

۱ـ اضلاع رو بروی آن دوبدو متوازی باشند
۲ـ زوایای روبروی آن دو بدو متساوی‌باشند.
۳ـ اضلاع روبروی آن دوبدو متساوی باشند .
۴ـ دوضلع روبروی آن هم متوازی وهم‌متساوی‌باشند
۵ـ اقطار آن یکدیگررا نصف‌کنند.

مثال ۱ - دو دایره بمراکز O و O' در نقاط P و Q متقاطع اند از نقاط P و Q دو خط متوازی رسم مینماییم تا دو دایره را در نفاط M و N و M' و N' قطع نمایند (M و N روی دایرهٔ O و M' و N' روی دایرهٔ O') ثابت کنید MM'=NN' و MN=M'N'



(ش۴۹)

مفروض: دودایرهٔ o و o' در نقاط P و Q متقاطع اند $MM' \parallel NN'$

حکم: $MM'=NN'$ و $MN=M'N'$

حل — کافیست ثابت کنیم چهار ضلعی MNN'M' متوازی‌الاضلاع است چون PQ را رسم کنیم در دو چهار ضلعی PQN'M' و PQNM داریم :

$$\hat{M}+\hat{Q}_1=180^\circ$$

$$\hat{M}'+\hat{Q}_2=180^\circ$$

ویا

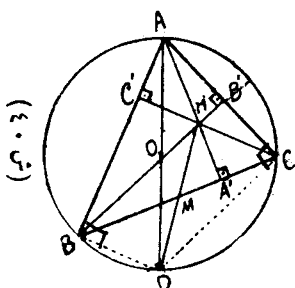
$$\hat{M}+\hat{M}'+\hat{Q}_1+\hat{Q}_2=360^\circ$$

وچون $\hat{Q}_1+\hat{Q}_2=180^\circ$ میباشد پس داریم :

$$\hat{M}+\hat{M}'=180^\circ$$

و بنابراین دوخط MN و M'N' باهم موازیند و چون MM' با NN' بفرض موازیست پس MNN'M' متوازی‌الاضلاع است واضلاع روبروی آن دوبدو متساوی هستند.

مثال ۲- در مثلث ABC ارتفاعات AA' و BB' و CC' را رسم کرده نقطهٔ مشترك آنها را H می‌نامیم ورأس A را بنقطهٔ o مرکز دایرهٔ محیطی مثلث وصل کرده امتداد میدهیم تادایرهٔ محیطی را درنقطهٔ دیگر D قطع نماید وفصل مشترك HD و BC را نقطهٔ M مینامیم. ثابت کنید M وسط BC و HD میباشد.



فرض:
$BC \perp AA'$
$AC \perp BB'$
$AB \perp CC'$
AD قطر دایرهٔ محیطی
مثلث و H محل تلاقی ارتفاعات

حکم:
$MD = MH$
$MC = MB$

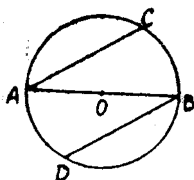
حل - نقطهٔ D را بنقاط B و C وصل میکنیم کافیست ثابت کنیم که چهارضلعی B D C H متوازی الاضلاع است . اما دو خط CHC' و DB باهم موازیند زیرا هردو بر AB عمود میباشند (CC' ارتفاع وارد بر AB است و ازطرف دیگر زاویهٔ محاطی DBA مقابل بقطر AD وقائمه می‌باشد) بهمین طریق ثابت می‌شود که BH با DC موازی است ولذا چهارضلعی BDCH متوازی الاضلاع است و اقطار آن درنقطهٔ M یکدیگر را نصف میکنند.

تمرینات

۳۱- ثابت کنید که درهرمثلث قائم الزاویـه میانـهٔ نظیر وتر ونصف وتراست .

تبصره- این خاصیت درحل بسیاری ازمسائل بکارمی آید.

راهنمائی - میانه را باندازهٔ خود امتداد داده از مساوی‌بودن قطرهای‌مستطیل استفاده کنید



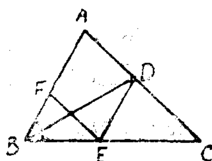
(ش ۴۱)

۳۲- اگر دریك‌دایره ازدو انتهای یك‌قطر دووتر متوازی رسم‌کنیم این دو وتر متساویند.

راهنمایی- شکل ACBD متوازی الاضلاع است ــ حل خود را با شمارهٔ (۱۱۳ : ح ۱) مقایسه‌کنید(این تمرین‌را

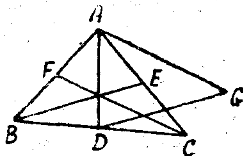
در شمارهٔ ۱۲ (مثال ۲) براه دیگری حل کرده ایم).

۳۳— درمثلث ABC نیمساز زاویهٔ B را رسم میکنیم تا AC را در نقطهٔ D قطع کند و ازنقطهٔ D خطی بموازات AB میکشیم تا BC را درنقطهٔE قطع کند و از E خطی بموازات AC رسم مینماییم تاAB را درنقطهٔF تلاقی کند ثابت کنید BE=AF



(ش ٤٢)

۳۴— مثلث ABC را در نظرگرفته میانه های‌آن AD و BE و CF را رسم میکنیم واز نقطهٔ D پاره خط DG رامساوی وموازی BE (ودرجهت آن) رسم کرده A را به G وصل‌مینماییم. ثابت‌کنید AG=CF

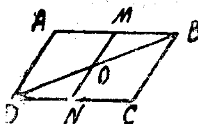


(ش٤٣)

راهنمایی— ADGE و CDEG و AFCG متوازی الاضلاع اند .

۳۵— در متوازی‌الاضلاع ABCD نقطهٔ M وسط ضلع AB را بنقطهٔ N وسط ضلع DC وصل میکنیم. ثابت‌کنید خطMN از وسط قطر DB میگذرد .

راهنمایی - شکل DMBN متوازی‌الاضلاع است .

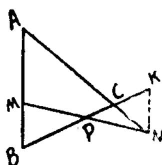


(ش٤٤)

حل خود را با شمارهٔ (۴۹ : ح ۱) مقایسه کنید .

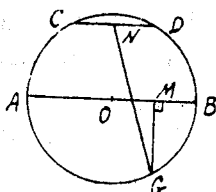
۳٦— روی یکی از دوساق AB ازمثلث متساوی‌الساقین

ABC نقطهٔ M را مابین A و B اختیار کرده روی امتداد ساق AC نقطهٔ N را طوری انتخاب می کنیم که CN = MB باشد و MN را رسم می‌کنیم. ثابت کنید قاعدهٔ BC پاره‌خط MN را نصف می‌کند. (۵۶ : ح ۱)



(ش ٤٥)

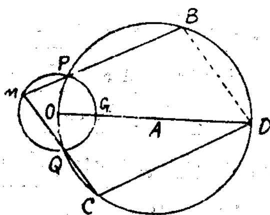
۳۷- در دایرهٔ O بقطر AB وتر CD را موازی با AB و مساوی با شعاع دایره رسم کرده از نقطهٔ M وسط oB عمودی بر قطر AB اخراج مینماییم تا دایره را درنقطهٔ G قطع کند ثابت کنید اگر نقطهٔ G را بنقطهٔ N وسط CD وصل کنیم قطر AB پاره خط GN را نصف می کند.



(ش ٤٦)

راهنمایی ـ شکل ONMG متوازی‌الاضلاع است.

۳۸- دایره‌یی بمرکز o و نقطه‌یی مانند C مفروض است. بمرکز A و بشعاع AO دایرهٔ دیگری رسم می‌کنیم تا دایرهٔ O را در نقاط P و Q و امتداد OA را در نقطهٔ D قطع کند. سپس نقطهٔ M متعلق بدایرهٔ O را بنقاط P و Q وصل کرده امتداد میدهیم تا خطوط حاصل دایرهٔ A را بترتیب درنقاط B و C قطع کنند. ثابت کنید MB = DC

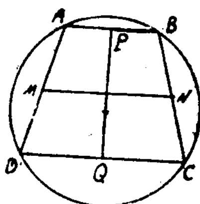


(ش ٤٧)

حالات مختلف شکل را بر حسب آنکه نقطهٔ A داخل دایرهٔ O یا خارج آن واقع باشد درنظر بگیرید.

راهنمایی ـ شکل MBDC متوازی‌الاضلاع است (بشمارهٔ ۵ همین کتاب ـ مثال وتبصرهٔ ۱ و تبصرهٔ ۲ـ مراجعه کنید).

۳۹ ـ در دایره‌یی بمرکز O در دوطرف مرکز دو وتر متوازی رسم مینماییم که یکی از آنها AB برابر با شعاع دایره و دیگری CD مساوی با ضلع مثلث منتظم محاطی باشد. ثابت کنید پاره خطی که اوساط دوساق ذوزنقهٔ ABCD را بهم وصل میکند مساوی‌است باارتفاع این ذوزنقه .



(ش ٤٨)

راهنمایی ـ شکل MPNQ مربع است .

۱۲ـ روش پنجم ـ بوسیلهٔ خواص وتر و مماسهای دایره

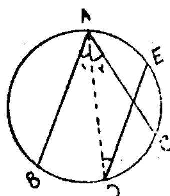
ازخواص زیر استفاده میکنیم :

در یك دایره یادردودایرهٔ متساوی وترهای روبرو بکمان های متساوی باهم برابرند (مثال ۱)

دریك دایره یا در دو دایرهٔ برابر هرگاه دو وتر ازمرکز بیك فاصله باشند باهم برابرند (مثال ۲)

دو مماس که ازیك نقطه بریك دایره رسم شوندباهم برابرند (مثال ۳)

مثال ۱ــ زاویهٔ BAC دریك دایره محاط است . نیمساز این زاویه دایره را در نقطهٔ D قطع می‌کند ثابت‌کنید وتر DE که از D بموازات AB رسم شود با AC مساویست (۱۵۹ : ح ۱)



(ش ۴۹)

فرض: $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ ، $DE \parallel AB$ ، نقاط A و B و C و D و E روی یك دایره‌هستند

حکم : $AC = DE$

حل ــ بـرای اثبات تساوی دو وتر AC و DE کافیست ثابت‌کنیم که دوکمان $\overset{\frown}{AEC}$ و $\overset{\frown}{DCE}$ نظیر این دو وتر متساویند یا اینکه $\overset{\frown}{DC} = \overset{\frown}{AE}$. چون AD نیمساز زاویهٔ A است پس $\hat{A}_2 = \hat{A}_1$ و از طرف دیگر $\hat{A}_1 = \hat{D}$ (زیرا DE موازیست با AB) پس $\hat{A}_2 = \hat{D}$ بنابراین کمانهای روبروی این دوزاویهٔ محاطی‌متساوی نیز باهم برابرند .

مثال ۲ــ هرگاه در یك دایره از دو انتهای یك قطر دو وتر متوازی رسم نماییم این دو وتر متساویند

تمرین شمارهٔ ۳۲ همین‌کتاب و شماره ۱۱۳ : ح ۱

(۵۰ : ح ۴۰)

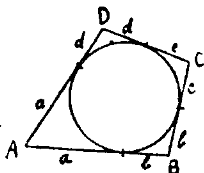
فرض $\begin{cases} AB \text{ قطر دایره} \\ AC \parallel BD \end{cases}$

حکم : $AC=BD$

حل- از مرکز دایره عمود OM را بر AC فرود آورده امتداد میدهیم تا وتر BD موازی آنرا در N قطع کند . دو مثلث OAM و OBN که در وتر و زوایای حاده متساویند با یکدیگر برابر میباشند و لذا داریم $OM=ON$ یعنی دو وتر مفروض از مرکز دایره بیك فاصله هستند و لذا متساویند .

مثال ۳- ثابت کنید که درهرچهار ضلعی‌محدب محیطی مجموع دو ضلع روبرو مساویست با مجموع دو ضلع روبروی دیگر (۱۳۰ : ح ۱)

حل - فرض می‌کنیم ABCD چهارضلعی محیطی باشد . میدانیم که مماسهای مرسوم ازیك نقطه بریك‌دایره متساویند پس اگر طول مماسهای‌مرسوم از A و B و C و D را بترتیب a و b و c و d بنامیم داریم :



(ش ۵۱)

$$AB+CD=a+b+c+d$$

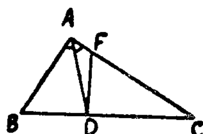
$$BC+DA=b+c+d+a$$

پس : $$AB+CD=BC+DA$$

تمرینات

۴۰- ثابت کنید هر ذوزنقه‌یی که در یك دایره محاط باشد متساوی‌الساقین است (۱۲۸ : ح ۱)

۴۱ - مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC ($\hat{A}=90°$) را درنظر گرفته نیمساز زاویهٔ A را رسم میکنیم تا وتر را در نقطهٔ D قطع کند و از D عمودی بر وتر اخراج میکنیم تا ضلع AC را درنقطهٔ F تلاقی نماید ثابت کنید BD=DF

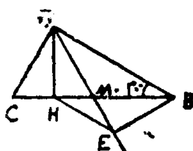


(ش ۵۲)

راهنمایی - ABDF محاطی است .

(این مسئله را در شمارهٔ ۱۳ براه دیگری حل کرده‌ایم)

۴۲- در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC ($\hat{A}=90°$) زاویهٔ B مساوی ۳۰ درجه است ارتفاع AH و میانهٔ AM را رسم کرده از B عمود BE را برخط AM فرود می‌آوریم و HE را رسم میکنیم . ثابت کنید BE=EH=AH

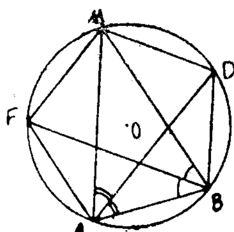


(ش ۵۳)

راهنمایی - دایرهٔ بقطر AB را رسم‌کرده از تمرینهای شمارهٔ ۷ و ۳۱ استفاده‌کنید .

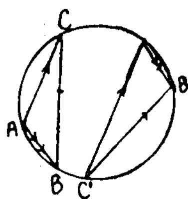
۴۳- در دایرهٔ O کمان AB را مساوی با ۷۲ درجه

اختیار نموده وسط کمان‌بزرگتر AB را M مینامیم و AB و MA و MB را رسم میکنیم و نیمساز زوایای MAB و MBA را میکشیم تا دایره را بترتیب در نقاط D و F قطع‌کنند. ثابت کنید اضلاع پنج‌ضلعی AFMDB باهم مساویند .

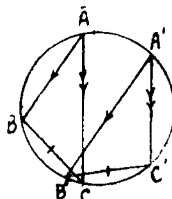


(ش ٥٤)

۴۴ - دو مثلث ABC و A'B'C' در یك دایره‌محاط



(ش ٥٦)



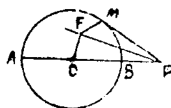
(ش ٥٥)

هستند . ثابت‌کنید هرگاه اضلاع زوایای A و A' نظیر بنظیر موازی باشند ضلع‌های BC و B'C' باهم مساویند .

راهنمایی - دو زاویهٔ A و A' یا باهم مساویند یامکمل یکدیگرنددرهردوحالت وترهای BC وB'C' روبرو بکمان‌ـ های برابر میباشند .

۴۵- روی امتداد قطر AB از دایرهٔ O نقطهٔ P را اختیار کرده از آن مماس PM را بر دایره رسم میکنیم و سپس نیمساز زاویهٔ MPA را میکشیم و از O عمودی‌برآن فرود آورد . پای عمود را F مینامیم.

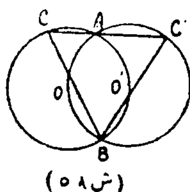
ثابت‌کنید $OF = FM$



(ش ٥٧)

راهنمایی ــ دایرهٔ بقطر OP را رسم کنید .

۴۶- دو دایرهٔ متساوی بمراکز O و 'O مفروضند که طول‌خط‌المرکزین آنها 'OO مساوی شعاع مشترك آنها است. اگر A و B نقاط تلاقی این دو دایره باشند از A خط دلخواهی رسم میکنیم تا دو دایره را در C و 'C قطع کند ثابت کنید مثلث 'BCC متساوی‌الاضلاع است (۱۵۶: ح ۱) (روش دیگر تمرین ۸۶)



(ش ۵۸)

۴۷- ثابت کنید هرمتوازی‌الاضلاع که بر یك دایره محیط باشد لوزی است (۱۳۱ : ح ۱) .

۴۸- ثابت کنید در هرمثلث قائم‌الزاویه مجموع اضلاع زاویهٔ قائمه مساویست با مجموع اقطار دوایــر محیطی و و محاطی مثلث .

۱۳ــ روش ششم ـ بوسیله خواص خطوط متناسب

نشان‌میدهیم که اندازه‌ها دوپاره خطی که میخواهیم‌تساویشان را ثابت کنیم دوجملهٔ اول تناسبی هستند کــه دو جملهٔ دیگرش باهم برابرند یااینکه اندازه‌های ایندو پاره‌خط صورتهای تناسبی‌هستندکه مخرجهایش باهم برابر است وبرای بکاربردن این‌روش ازخواص‌زیر استفاده می‌نماییم .

چندخط متوازی روی دوخط قاطع پاره‌خطهای متناسب پدید میآورند نیمساز زاویهٔ داخلی هرمثلث ضلع روبروی آنرا به نسبت دوضلع‌مجاورتقسیم می‌نماید (تقسیم اضافی)

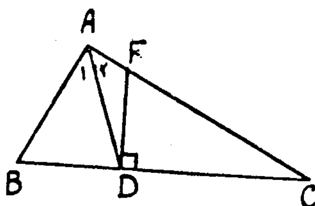
نیمساز خارجی هرمثلث ضلع روبروی آنرا به نسبت‌دوضلع مجاور تقسیم‌میکند (تقسیم نقصانی)

خواص چندضلعی ها ومثلث های متشابه

خطوط متقارب روی دو خط متوازی پاره خطهای متناسب پدید می‌آورند.

مثال- مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC ($\hat{A}=90^\circ$) را در نظرگرفته نیمساز زاویهٔ A را رسم میکنیم تا وتر را در نقطهٔ D تلاقی نماید و از D عمودی بر وتر رسم میکنیم تاضلع AC را در نقطهٔ F قطع کند ثابت کنید:

$$BD = DF$$



(ش۹۰)

فرض:
$$B\hat{A}C=90^\circ$$
$$B\hat{A}D=D\hat{A}C$$
$$F\hat{D}C=90^\circ$$

حکم: $BD=DF$

حل- نیمساز AD ضلع BC را بدو پاره خط که با اضلاع مجاور خود متناسب هستند قسمت می‌نماید.

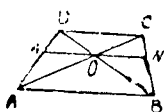
$$\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC} \qquad (1)$$

ازطرف دیگر دومثلث قائم‌الزاویهٔ ABC و QFC که در زاویهٔ حادهٔ C مشترك هستند متشابه میباشند و داریم:

$$\frac{DF}{DC}=\frac{AB}{AC}$$

چون در دوتناسب (۱) و (۲) یك‌نسبت یعنی $\frac{AB}{AC}$ مشترك است داریم $\frac{BD}{DC}=\frac{DF}{DC}$ وچون‌درتناسب‌اخیر مخرجها باهم مساویند صورتها نیز باهم برابر میباشند یعنی $BD = DF$ (روش دیگر : تمرین ۴۱) .

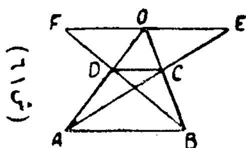
تمرینات



(ش ۶۰)

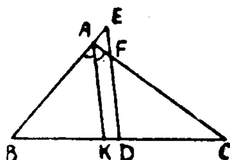
۴۹- ثابت کنید که در هر ذوزنقه پاره‌خطی که ازنقطهٔ O محل تلاقی‌دوقطر بموازات دو قاعده رسم شده بدو ساق محدود باشد در نقطهٔ O نصف میشود (۱ ح : ۲۷۰)

۵۰- درنقطهٔ O محل‌برخورد دوساق ذوزنقهٔABCD خطی بموازات دو قاعدهٔ آن رسم می‌نماییم تا امتداد دوخط را در نقاط E و F قطع نماید ثابت کنید oF=oE (۱ ح : ۲۷۲)



(ش ۶۱)

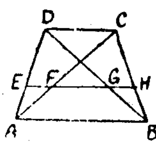
۵۱- در مثلث ABC نیمساز زاویهٔ A را رسم میکنیم تا قاعدهٔ BC را درنقطهٔ K قطع کند و ازنقطهٔ D وسط BC خطی بموازات AK میکشیم تاخطAB را درنقطه E و خط AC را در نقطهٔ F تلاقی نماید .
ثابت‌کنید BE=CF



(ش ۶۲)

۵۲- ثابت کنید که اضلاع غیرمتوازی و قطرهای هر

ذوزنقه روی هر خط که بموازات دو قاعده رسم شود سه پاره‌خط متوالی جدا می‌نمایند که دو پاره‌خط که در دو طرف واقع شده متساویند یعنی روی شکل مقابل داریم EF=GH (۲۷۱ : ح ۱)



(ش ۶۳)

۱۴ــ روش هفتم- بوسیلهٔ مقایسهٔ دوپاره خط مفروض با سایر پاره‌خطهای شکل یا محاسبهٔ طول آنها برحسب معلومات

غالباً بوسیلهٔ مقایسه دو پاره‌خط مورد بحث با سایرپاره‌خط های شکل میتوان تساوی آنها را ثابت نمود و برای این کار روش کلی این است که ثابت کنیم دوپاره خط مورد بحث با یك پاره خط ثالث یا نظیربنظیر با دو پاره خط متساوی برابر هستند (مثال ۱)

و نیز میتوان بوسیلهٔ محاسبهٔ دو پاره‌خط برحسب اجــزای معلوم شکل تساوی آنها را ثابت نمود (مثال ۲)

در این روش ازخواص زیر استفاده می‌نماییم :

در مثلث قائم‌الزاویه میانهٔ نظیروتر مساوی نصف وتر است

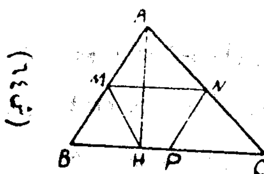
پاره‌خطی که اوساط دوضلع یك مثلث را بهم وصل می کند با ضلع سوم موازی بوده مساوی نصف آن می‌باشد

سه میانه هر مثلث در یك نقطه متقارب هستند که‌درثلث هر میانه (ابتدا ازقاعده) قرار دارد

در هرمثلث قائم‌الزاویه که یك زاویهٔ حادهٔ آن °۳۰ باشد ضلع مقابل بآن زاویه نصف وتر است.

کلیه روابط متری درمثلث و در دایره

مثال ۱- در مثلث ABC اوساط اضلاع AB و AC و BC را بترتیب M وN وP می‌نامیم و ارتفاع AH و پاره‌خط های MN و NP و MH را رسم می‌کنیم ثابت کنید MNPH ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین است (۷۲ : ح ۱)

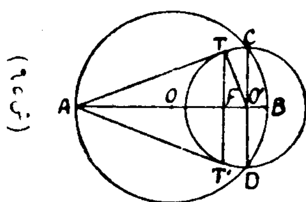


فرض
$$MA = MB$$
$$NA = NC$$
$$FB = PC$$
$$\overset{\wedge}{AHC} = ۹۰^{\circ}$$

حکم
$$MN \parallel BC$$
$$MH = NP$$

حل ــ چون M و N اوساط اضلاع AB و AC هستند MN با BC موازی است . ازطرف دیگر پاره خط NP که اوساط دوضلع AC و BC را بهم وصل میکند مساوی نصف AB است یعنی $NP = \frac{AB}{۲}$ ودرمثلث قائم‌الزاویهٔ AHB میانهٔ AH نصف وتر AB میباشد یعنی $MN = \frac{AB}{۲}$ از مقایسهٔ این رابطه با رابطهٔ قبل نتیجه میشود MH=NP

مثال ۲- در دایرهٔ (O) وتر CD وا رسم نموده بقطرCDدایرهٔ دیگر(O') را رسم‌میکنیم‌خطالمرکزین OO' دایرهٔ (O) را در نقاط A و B قطع میکند از نقطهٔ A مماسهای AT و AT' را بر دایرهٔ (O') رسم میکنیم وتر TT' خط oo' را درنقطهٔ F قطع میکند ثابت‌کنید‌که O' وسط BF است .



فرض
$AB \perp CD$
CD قطر دایرهٔ 'o
AB قطر دایرهٔ o
'AT و AT مماس بر o

حکم : $O'F = O'B$

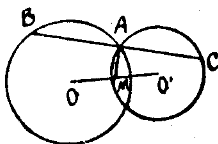
حل - چون AB قطر دایرهٔ o است مثلث CBA قائم‌الزاویه است و داریم $\overline{O'C}^2 = O'B \cdot O'A$ و یا $o'B = \frac{\overline{O'C}^2}{O'A}$ (۱)

وچون AT مماس بر دایرهٔ (O') است مثلث O'AT قائم‌الزاویه است و داریم $\overline{O'T}^2 = OF \cdot O'A$ و یا $O'F = \frac{\overline{O'T}^2}{O'A}$ (۲)

اما میدانیم $O'T = O'C$) هردو شعاع یکدایره‌اند) پس از مقایسهٔ روابط (۱) و (۲) حاصل میشود $OB = OF$

تمرینات

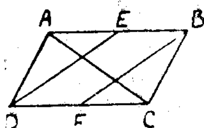
۵۳- دو دایرهٔ O و 'O یکریگر را در نقطهٔ A قطع می‌نمایند. نقطهٔ A را بنقطهٔ M وسط 'OO وصل کرده عمودی از نقطهٔ A برAM اخراج میکنیم تادایرهٔOرا درنقطهٔ B و دایرهٔ 'O را در نقطهٔ C قطع نماید ثابت کنید $AB = AC$ (نصف آنها باهم برابرند).



(ش ٦٦)

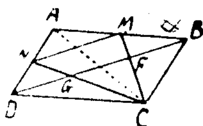
۵۴- اوساط اضلاع متوالی یك چهارضلعی را بهم وصل میکنیم ثابت کنید شکل حاصل متوازی‌الاضلاع است (اضلاع روبروی آن باهم برابرند)

۵۵ – در متوازی‌الاضلاع A B C D رأس D را به‌نقطهٔ E وسط ضلع AB و رأس B را بنقطهٔ F وسط ضلع C D وصـل مینماییم . ثابت‌کنید خطوط DE و BF قطر AC را به سه قسمت متساوی تقسیم می‌نمایند (مثال۲ شمارهٔ ۶)



(ش۶۷)

۵۶— درمتوازی‌الاضلاع ABCD اوساط دوضلع مجاور AB و AD را بترتیب M و N نامیده پاره خطهای CM و CN را رسم میکنیـم تا قطر BD را بترتیب درنقاطF وG قطع‌نمایند ثابت‌کنید BF=FG=GD

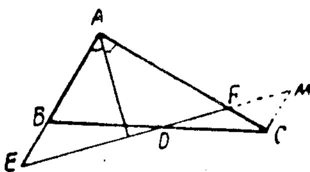


(ش ۶۸)

راهنمایی ـ قطر AC را وصـــل کـرده از خاصیت فصل مشترك میانه های مثلث استفاده‌کنید.

۵۷ — درمثلث ABC ازنقطهٔ D وسط ضلع BCعمودی برنیمساز زاویـهٔ A رسم میکنیم تااضلاع ABوAC را بترتیب درنقاط E وF قطع‌کند ثابت‌کنید :

BE=CF

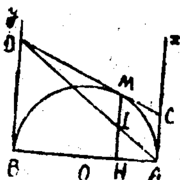


(ش ۶۹)

راهنمایی- ازCخطی موازات AB رسم‌کنید تا EF را در M قطع‌کند و پاره خطهای مزبوررا باMC مقایسه کنید (۴۶: ح ۲)

۵۸— ثابت‌کنید هرگاه درمثلثی دومیانه متساوی‌باشند آن مثلث متساوی‌الساقین‌است (۸۴:ح۱)

۵۹ — نیمدایرهٔ بقطر AB را درنظر گرفته از نقاط A وB وD مماس Ax وBy را بر آن رسم می‌نماییم و ازنقطهٔ اختیاری M واقع برنیمدایره مماسی بر آن رسم میکنیم تا دو مماس اول را بترتیب درنقاط C وD قطع کند اگر I فصل مشترك AD باعمود MH باشدکه ازM برAB فرود آید ثابت کنید IH=MI



(ش ۷۰)

فصل دوم

چگونه ثابت‌کنیم‌که دو زاویه باهم برابرند ؟

۱۵- روش اول - بوسیلهٔ انطباق دوزاویه -تقارن محوری

این روش از تعریف تساوی دوزاویه نتیجه میشود و آنرا درکتاب اول هندسه برای اثبات آنکه :
« در هر مثلث متساوی‌الساقین زوایای روبرو بدوساق باهم برابرند » بکار برده‌ایم . این روش درمسائل غالباً بصورت دیگری بکار می‌آید :

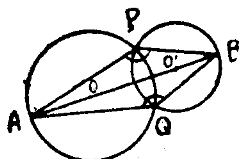
دوزاویه‌که نسبت بیك محور قرینهٔ یکدیگر باشندمتساویند

چون بطورکلی درهندسه ثابت کرده‌ایم که هرگاه دوشکل نسبت بیك محور قرینهٔ یکدیگر باشند باهم مساویند درمسائل‌هندسه بجای انطباق دوزاویه تقارن آنهارا نسبت بیك محور بکار میبریم .

تبصره ــ تقریباً همیشه میتوان بجای این طریقه روشی‌راکه متکی برتساوی مثلث‌ها میباشد بکار برد (شمارهٔ ۲۲)

مثال- دودایره درنقاط P و Q متقاطع میباشند. خطالمرکزین آنها OO' دایرهٔ O را درA ودایرهٔ O' را درB قطع‌میکند (AوB خارج ازپاره‌خط OO'واقع هستند) ثابت‌کنید $\widehat{APB}=\widehat{AQB}$

حل ــ خط **AB** محور تقارن شکل است (بعبارت دیگر اگر شکل را حول **AB** تا کنیم قسمت بالای شکل برقسمت پایین آن منطبق می‌گردد : نقطهٔ **P** برنقطهٔ **Q** میافتد) پس چون دو زاویهٔ **APB** و **AQB** نسبت بمحور **AB** قرینهٔ یکدیگرهستند متساوی میباشند .

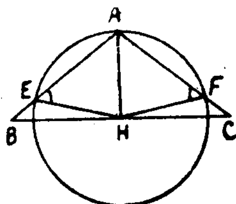


(ش ۷۱)

تمرینات

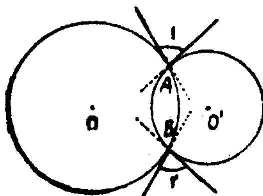
۶۰ـ مثلث متساوی‌الساقین **ABC** ($AB=AC$) را در نظرگرفته ارتفاع **AH** را رسم میکنیم و بمرکز **H** وبشعاع**HA** دایره‌یی‌میکشیم تا اضلاع **AB** و **AC** مثلث را بترتیب در **E** و **F** قطع کند ثابت کنید :

$$\hat{AEH} = \hat{AFH}$$



(ش ۷۲)

۶۱ ـ دو دایره در نقاط **A**و**B** متقاطع‌هستند. مماسهای بر این دودایره را در نقاط **A** و **B** رسم مینماییم (ش ۷۳) ثابت کنید $\hat{A}_1=\hat{B}_2$

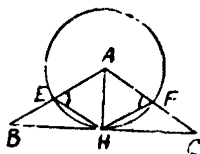


(ش ۷۳)

۶۲ـ مثلث متساوی‌الساقین **ABC** ($AB=AC$) را در

نظر گرفته ارتفاع AH را رسم میکنیم و بمرکز A وشعاع AH دایره‌یی رسم میکنیم تا AB و AC را بترتیب در E و F قطع کند ثابت کنید :

$$\hat{AEH} = \hat{AFH}$$



(ش ٧٤)

١٦- روش دوم- بوسیلهٔ خواص مثلث یاذوزنقهٔ متساوی‌الساقین

از خواص زیر استفاده می‌نماییم :

درهر مثلث متساوی‌الساقین زوایای روبرو بدوساق برابرند

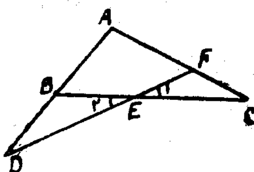
میانه یا ارتفاع نظیر مثلث متساوی‌الساقین نیمساز زاویهٔ رأس نیز میباشند (تمرین ۶۳)

در هرذوزنقهٔ متساوی‌الساقین زوایای مجاور بیك قاعده باهم برابرند .

مثال- درمثلث ABC زاویهٔ B دو برابر زاویهٔ C است . روی ضلع BC نقطه یی مانندE اختیارکرده ضلع AB را از طرف B باندازهٔ طول BD مساوی با BE امتداد میدهیم و DE را رسم می‌کنیم تا AC را در نقطهٔ F قطع نماید ثابت کنید $\hat{FEC} = \hat{C}$

فرض $\left\{ \begin{array}{l} \hat{ABC} = ۲\hat{C} \\ BD = BE \end{array} \right.$

حکم : $\hat{E}_۱ = \hat{C}$



(ش ۷۵)

حل - مثلث BDE متساوی‌الساقین است و داریم $\hat{D} = \hat{E}_۲$ بنابراین زاویهٔ ABC که زاویهٔ خارجی این مثلث است مساوی دو برابر زاویهٔ $E_۲$ میباشد و از طرف دیگر زوایای $E_۱$ و $E_۲$ متقابل برأس میباشند پس داریم :

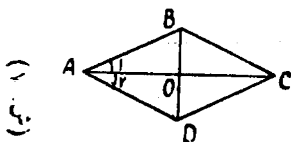
$$\hat{ABC} = ۲\hat{E}_۲ = ۲\hat{E}_۱$$

وچون نظر بفرض مسئله زاویهٔ ABC دو برابر زاویهٔ C است پس

$$\hat{E}_۱ = \hat{C}$$

تمرینات

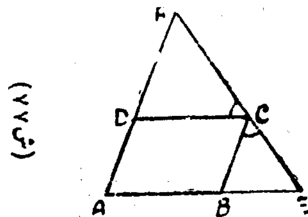
۶۳ - ثابت کنید که اقطار لوزی زوایای آنرا نصف میکنند (ش ۷۶)



(ش ۷۶)

۶۴ - در متوازی‌الاضلاع ABCD ضلع AB رابا ندازهٔ BE مساوی با BC و ضلع AD را با ندازهٔ DF مساوی با DC امتداد میدهیم . ثابت کنید

$$\hat{DCF} = \hat{BCE}$$

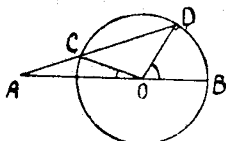


(ش ۷۷)

۶۵ــ وتر CD از دایرهٔ O را باندازهٔ CA مساوی با شعاع دایره امتداد داده نقطهٔ A را بمرکز وصل میکنیم و امتداد میدهیم تادایره‌را درنقطهٔ B قطع نماید ثابت‌کنید:

$$\widehat{DOB} = ۳\widehat{QOA}$$

(شمارهٔ ۱۰۰ ح : ۱



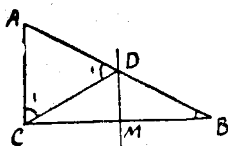
(ش ۷۸)

راهنمایی- شعاع OC را رسم‌نموده ازمثلث‌های متساوی‌ـ الساقین وخاصیت‌زاویهٔ خارجی مثلث استفاده‌کنید .

۶۶ــ درمثلث ABC زاویهٔ C مساوی باسه‌برابر زاویهٔ B است عمود منصف ضلع BC

AB را درنقطهٔ D قطع می‌نماید

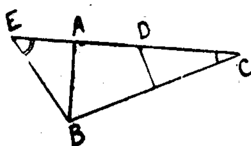
ثابت کنید $\hat{D}_۱ = \hat{C}_۱$



(ش ۷۹)

۶۷ــ در مثلث قائم الزاویهٔ ABC (AB < AC) عمود متصف وتر BC ضلع AC رادرنقطهٔ D قطع مینماید. قرینهٔ نقطهٔ D را نسبت به‌رأس A نقطهٔ E می‌نامیم. ثابت‌کنید :

$$\widehat{BEC} = ۲\widehat{BCE}$$



(ش ۸۰)

۶۸ــ ثابت‌کنید که اگر در مثلث قائم‌الزاویه یکی از زوایای حاده مساوی ۳۰ درجه باشد ارتفاع ومیانهٔ نظیر وتر زاویهٔ قائمه را بسه‌قسمت متساوی تفسیم مینمایند.

۱۷- روش سوم - بوسیلهٔ خواص زوایایی که از تقاطع دوخط متوازی بایك خط قاطع پدید میآیند .

از خاصیت های زیر استفاده میکنیم :

هرگاه دوخط متوازی را خط ثالثی قطع کند :

۱ــ هردو زاویهٔ متبادل داخلی باهم و هر دو زاویهٔ متبادل خارجی باهم برابرند .

۲ــ هردو زاویهٔ متقابل داخلی با هم و هردو زاویهٔ متقابل خارجی باهم مکمل هستند .

۳ــ هردو زاویهٔ متقابل داخلی وخارجی باهم برابرند.

(ش ۸۱)

(۱)

متبادل خارجی	متبادل داخلی
$\hat{A}_1 = \hat{B}_3$	$\hat{A}_3 = \hat{B}_1$
$\hat{B}_1 = \hat{B}_3$	$\hat{A}_4 = \hat{B}_2$

(۲)

متقابل خارجی	متقابل داخلی
$\hat{A}_1 + \hat{B}_4 = 180^\circ$	$\hat{A}_3 + \hat{B}_2 = 180^\circ$
$\hat{A}_2 + \hat{B}_3 = 180^\circ$	$\hat{A}_4 + \hat{B}_1 = 180^\circ$

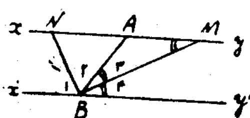
(۳) متقابل داخلی وخارجی

$$\hat{A}_1 = \hat{B}_1 \text{ و } \hat{A}_2 = \hat{B}_2 \text{ و } \hat{A}_3 = \hat{B}_3 \text{ و } \hat{A}_4 = \hat{B}_4$$

غالباً برای بکار بردن این روش باید ثابت کرد که دوزاویهٔ

مورد بحث با یك زاویهٔ ثالث برابر هستند و این خود برای اثبات تساوی دو زاویه یك روش‌کلی است .

مثال - دوخط متوازی xy و $x'y'$ را خط ثالثی بترتیب درنقاط A و B قطع میکنند . روی خط xy و در دو طرف A طولهای AM و AN را مساوی AB جدا می‌کنیم. ثابت کنید BM و BN نیمساز-های زوایایی هستندکه AB با $x'y'$ تشکیل میدهد.



(ش ۸۲)

فرض $\left\{ \begin{array}{l} xy \parallel x'y' \\ AD = AM = AN \end{array} \right.$

حکم $\left\{ \begin{array}{l} \hat{B}_1 = \hat{B}_2 \\ \hat{B}_3 = \hat{B}_4 \end{array} \right.$

حل- چون مثلث BAM متساوی‌الساقین است داریم :

$$\hat{B}_3 = A\hat{M}B$$

از طرف دیگر نظر بدو متوازی xy و $x'y'$ و قاطع BM داریم

$$B_4 = A\hat{M}B$$

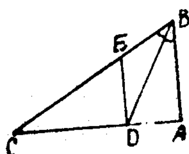
(متبادل داخلی) ازمقایسهٔ این دو رابطه باهم نتیجه می‌شود

$$\hat{B}_3 = \hat{B}_4$$

یعنی BM نیمساز زاویهٔ ABy' است . بهمین ترتیب ثابت میشود که BN نیمساز زاویهٔ ABx' میباشد .

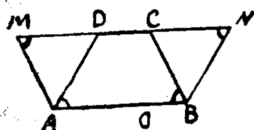
تمرینات

۶۹- در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC ($\hat{A}=90^\circ$) نیمساز زاویهٔ B ضلع AC را در نقطهٔ D قطع مینماید از نقطهٔD عمودی بر AC اخراج میکنیم تا BC را در E قطع کند ثابت کنید مثلث DEB متساوی‌الساقین است .



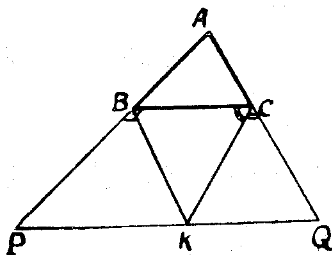
(ش ۸۳)

۷۰- ازدو انتهای قاعدهٔ بزرگترAB ازذوزنقهٔ ABCD خط AM را موازی با BC و خط BN را موازی با AD رسم مینماییم . ثابت کنید که زوایای M و N با زوایای A و B ذوزنقه برابرند .



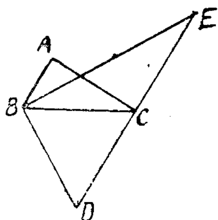
(ش ۸۴)

۷۱- نیمساز های زوایای خارجی B و C از مثلث ABC یکدیگر را در نقطهٔ K قطع مینمایند . از نقطهٔ K خطی بموازات BC رسم می‌کنیم تا اضلاع AB و AC را بترتیب در P و Q قطع کند . ثابت کنید دومثلث PKB و QKC متساوی‌الساقین هستند .



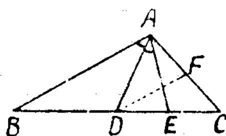
(ش ۸۵)

۷۲- درمثلث A B C زاویهٔ A قائمه است از رأس C عمودی برضلع AC اخراج نموده در دوطرف C روی این عمود دوطول CD وCE را مساوی با BC جدا می‌کنیم . ثابت کنیدکه BD و BE نیمسازهای داخلی وخارجی زاویهٔ ABC میباشند .



(ش ۸٦)

۷۳- در مثلث ABC ضلع BC دو برابر ضلع AC است . ثابت‌کنیدکه میانهٔ AD نیمساز زاویه ایست‌که ضلع AB بامیانهٔAE ازمثلثADC تشکیل میدهد (۸۷:ح۱)



(ش ۸۷)

راهنمایی ـ میانهٔ DF از مثلث ADC را رسم نموده از مثلث های متساوی الساقین استفاده کنید .

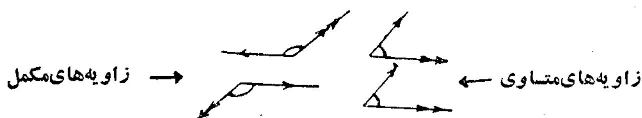
روش چهارم ـــ بوسیلهٔ خواص زوایایی کـــه اضلاعشان باهم موازیند یابرهم عمودند

از خاصیت های زیر استفاده میکنیم :

الف ـ درصورتیکه اضلاع دوزاویه نطیر بنظیر با هم موازی باشند آندو زاویه یا متساویند یا مکمل یکدیگرند .

اگر اضلاع متوازی دو بدو هـــردو دریك جهت یا هردو در

خلاف جهت یکدیگر باشند دو زا زاویه متساویقد (ش۸۸(

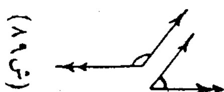


(ش۸۸)

اگر دوضلع متوازی دریك‌جهت و دوضلع متوازی دیگـر

درخلاف جهت یکدیگر باشند دو زاویه

مکمــل یکدیگر هستند (ش ۸۹)

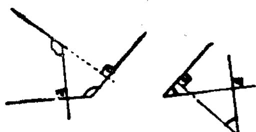

(ش۸۹)

ب ـ درصورتیکه اضلاع دو زاویه نظیر بنظیر برهم عمود

باشند آندو زاویه یا متساویند یا مکمل یکدیگرند :

اگر دوزاویهٔ مزبور هردو حاده یا

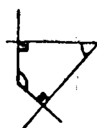
هردومنفرجه‌باشندباهم مساویند (ش۹۰)


(ش۹۰)

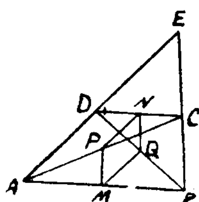
اگر از ایندو زاویه یکی حاده و

دیگری منفرجه باشد مکمل یکدیگرند

(ش ۹۱) .


(ش ۹۱)

مثال۱- ذوزنقهٔ ABCD را درنظرگرفته اوساط دو قاعدهٔ AB و CB را بترتیب M و N می‌نامیم و اوساط دو قطر AC و BD را بترتیب P و Q میخوانیم . ثابت‌کنید زوایای M و N از چهارضلعی MPNQ مساوی با زاویهٔ اضلاع غیرمتوازی ذوزنقه هستند .



(ش۹۲)

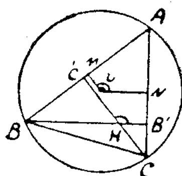
فرض:
AB ∥ CD
M وسط AB
N وسط CD
P وسط AC
Q وسط BD

حکم : $\hat{PMQ}=\hat{PNQ}=\hat{E}$

حل ـ چون پاره خط NQ اوساط دو ضلع مثلث DBC را بهم وصل‌کرده است با ضلع سوم یعنی BC موازی است و بهمین دلیل PN نیز با AD موازی میباشد پس اضلاع دو زاویهٔ PNQ و E نظیر بنظیر باهم موازی و ممتد در یك جهت میباشند (مطابق شکل) و لذا این دو زاویه باهم برابرند. بهمین ترتیب ثابت میشود که اضلاع دو زاویهٔ PMQ و E نظیر بنظیر متوازی و ممتد درخلاف جهت یکدیگر میباشند پس باهم مساویند .

تمرینات

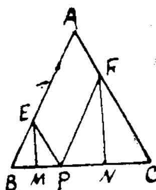
۷۴- مثلث ABC و دایرهٔ محیطی آنرا درنظر گرفته ارتفاعات 'BB و 'CC را رسم میکنیم و محل تلاقی آنهارا H می‌نامیم و از نقطهٔ O مرکز دایرهٔ محیطی عمودهای OM و ON را بترتیب بر AB و AC فرود می‌آوریم ثابت کنید:



(ش ۹۳)

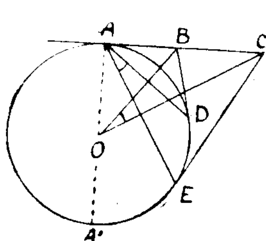
$$\widehat{B'HC'}=\widehat{MON}$$

۷۵- نقطهٔ P را روی قاعدهٔ BC از مثلث متساوی‌الساقین ABC اختیارکرده از نقاط M و N که بترتیب در وسط پاره خطهای PB و PC واقع هستند دو عمود بر BC اخراج می‌نماییم اولی AB را دو نقطهٔ E و دومی AC را در نقطهٔ F قطع میکنند ثابت کنید زاویهٔ EPF با زاویهٔ A برابر است.



(ش ۹۴)

مثال۲— روی مماس در نقطهٔ A بر دایرهٔ (O) دو نقطهٔ B و C را در یك طرف A اختیار مینماییم و از آنها دو مماس BD و CE را بر دایره رسم میکنیم ثابت کنید $\widehat{BOC}=\widehat{DAE}$ (ح ۱: ۱۲۷)



(ش ۹۵)

فرض
- خط ABC مماس بر (O)
- BD وCE مماس بر (O)
- B مابین A و C

حکم : $\hat{BOC} = \hat{DAE}$

حل ـــ میدانیم OB برخط AD و همچنین OC بر AE عمود است (۱۲۴ : ح ۱) پس اضلاع دو زاویهٔ BOC و DAE نظیر بنظیر برهم عمودند . از طرف دیگر ایندو زاویه هر دو حاده هستند : زاویهٔ BOC حـاده است زیـرا زاویهٔ OBC کـه زاویهٔ خارجی‌مثلث قائم‌الزاویه OAB میباشد منفرجه است و مثلث OBC نمیتواند بیش از یك زاویهٔ منفرجه داشته باشد و اما زاویهٔ DAE حاده است زیرا چون نقاط B و C در یکطرف A واقع هستند نقاط تماس D و E در یکطرف قطر AA' قرار دارند .

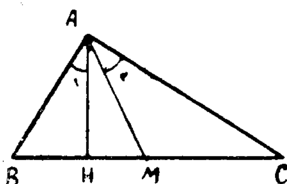
پس داریم $\hat{BOC} = \hat{DAE}$

تبصره ـــ همین طریقه غالباً بصورت دیگـری بکار میرود و آن عبارت از اینست که ثابت کنیم دو زاویـهٔ مورد بحث هردو دارای یك مکمل یا یك متمم هستند (مثال ۳) .

غالباً در موقع بکار بردن این روش باید ثابت کنیم‌که دو زاویهٔ مورد بحث نظیر بنظیر با دو زاویهٔ متساوی برابر هستند یا اینکه هردو آنها با یك زاویهٔ ثالث برابر میباشند و این‌خود برای اثبات تساوی دو زاویه روشی کلی است .

مثال ۳ـــ درمثلث قائم‌الزاویهٔ ABC $(\hat{A}=90^\circ)$ ارتفاع AH و میانهٔ AM را رسم میکنیم ثابت کنید

$$B\hat{A}H=M\hat{A}C$$



(ش ٩٦)

فرض $\left\{\begin{array}{l}\hat{A}=90^\circ \\ BC \perp AH \\ BM=MC\end{array}\right.$

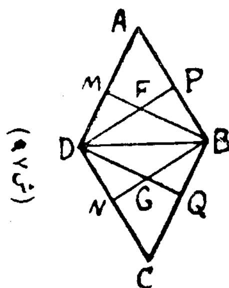
حکم : $B\hat{A}H=M\hat{A}C$

حل ـــ در مثلث قائم‌الزاویهٔ AHB زاویهٔ A_1 متمم زاویهٔ B میباشد و در مثلث قائم‌الزاویه ABC زاویهٔ C متمم زاویهٔ B است پس داریم $\hat{C}=\hat{A}_1$ از طرف دیگر مثلث AMC متساوی‌الساقین است (AM نصف BC میباشد) و داریم $C=\hat{A}_2$

از مقایسهٔ این دو رابطه نتیجه میشود $\hat{A}_1=\hat{A}_2$

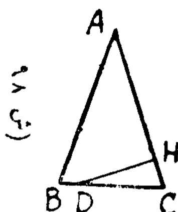
تمرینات

۷٦ - لوزی ABCD را در نظرمیگیریم و از رؤس B و D عمودهای BM و BN و DP و DQ را بر اضلاع مقابل فرود میآوریم این‌عمودها مطابق شکل درنقاط F و G متقاطع هستند . ثابت کنید که زوایای چهارضلعی BFDG با زوایای لوزی نظیر بنظیر برابرهستند .



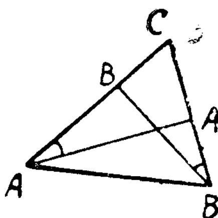
(ش ٩٧)

۷۷ - از نقطهٔ **D** واقع بر قاعدهٔ **BC** مثلث متساوی - الساقین **ABC** یا واقع بر امتداد آن عمود **DH** را بر ساق **AC** فرود می‌آوریم ثابت کنید زاویهٔ **A** دوبرابر زاویهٔ **HDC** است .



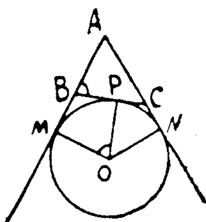
(ش ۹۸)

۷۸ - درمثلث **ABC** ارتفاعات **AA′** و **BB′** را رسم می‌کنیم . ثابت کنید $\hat{A}_1 = \hat{B}_1$ سپس ارتفاع سوم مثلث را رسم کرده زوایای دوبدو متساوی را که بوسیلهٔ ارتفاعات روی شکل پدید می‌آید تعیین نمایید .



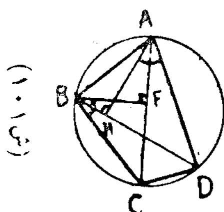
(ش۹۹)

۷۹ - دایرهٔ **O** در نقاط **M** و **N** با اضلاع زاویهٔ **A** مماس است. خطی رسم میکنیم که با دایره در نقطه‌یی مانند **P** مماس‌بوده اضلاع زاویهٔ **A** را در نقاط **B** و **C** قطع نماید بطوریکه **A** و **O** درطرفین این خط واقع شوند ثابت‌کنیدکه زاویهٔ دوشعاع که ازدو نقطهٔ تماس متوالی (**M** و**P**) یا (**P** و **N**) میگذرند بایکی اززوایای **B** یا **C** ازمثلث **ABC** برابر است .
صورت مسئله را درموقعیکه نقاط **A** و **O** دریکطرف خط **BC** واقع‌باشند تغییر داده آنطوریکه باید بنویسید .



(ش۱۰۰)

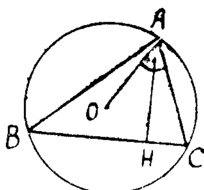
۸۰- چهار ضلعی ABCD دردودایره یی محاط است از نقاط A و B عمودهای AH و BF را بر دوقطر آن فرود می‌آوریم ثابت کنید $\hat{DAH}=\hat{CBF}$



(ش ۱۰۱)

۸۱- ثابت کنید که درهـرمثلث ABC زاویـهٔ ارتفاع AH با ضلع AB مساوی است با ضلع AC باشعاع AO دایرهٔ محیطی آن مثلث

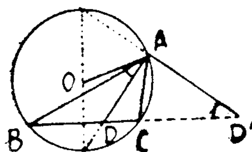
راهنمایــی ـ قطر 'AA را رسم کرده 'A را به C وصل کنید .



(ش ۱۰۲)

۸۲- مثلث ABC در دایره‌یی بمرکـز O محاط است نیمسازهای داخلی AD وخارجی 'AD زاویهٔ A را رسم میکنیم . ثابت کنید زاویهٔ 'AD'B بازاویهٔ OAD مساویست.

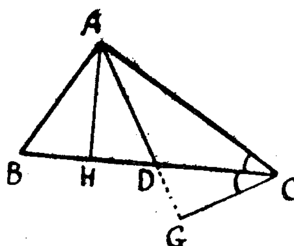
راهنمایی ـ اگر AD را امتداد دهیم از وسط کمان BC میگذرد .



(ش ۱۰۳)

۸۳- درمثلث قائم‌الزاویهٔ ABC $(\hat{A}=90^\circ)$ ضلع AB

از ضلع AC کوچکتر میباشد . ارتفاع AH را رسم کرده قرینهٔ ضلع AB را نسبت بآن AD مینامیم و از نقطهٔ C عمود CG را بر خط AD فرود می‌آوریم. ثابت کنید که BC نیمساز زاویهٔ GCA می‌باشد.



(ش ۱۰٤)

راهنمایی- متمم‌های این دوزاویه باهم مساویند .

۱۹ - روش پنجم - بوسیلهٔ خواص زوایای مرکزی و محاطی وظلی

از خاصیت‌های زیر استفاده مینماییم :

اندازهٔ زاویهٔ مرکزی مساویست با اندازهٔ کمان روبروی آن

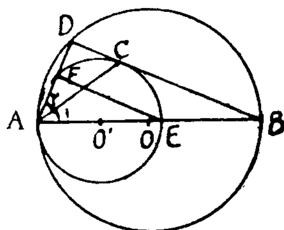
اندازهٔ زاویهٔ محاطی‌مساویست با نصف‌اندازهٔ کمان‌روبروی آن

اندازهٔ زاویهٔظلی مساویست با نصف اندازهٔ کمان روبروی آن

اگر رأس زاویه‌یی در داخل (یا خارج) یك‌دایره واقع‌باشد اندازهٔ آن مساویست با نصف مجموع (یا نصف تفاضل) اندازهٔ دو کمانی از دایره که اضلاع آن دربرمیگیرند .

در تمام مطالب فوق واحد زاویه ، زاویهٔ مرکزی رو برو بواحد کمان فرض شده است .

مثال ۱ - دودایره درنقطهٔ A مماس داخل‌هستند ازنقطهٔ B انتهای قطر AB از دایرهٔ بزرگتر مماس BC را بر دایرهٔ کوچکتر رسم نموده امتداد میدهیم تادایرهٔ بزرگتر را درنقطهٔ D قطع کند . ثابت کنید AC نیمساز زاویهٔ BAD میباشد .
(۱ ح : ۱۶۳)



(ش ۱۰۵)

فرض: دوایر O و O' مماس‌داخل هستند BC بر O' مماس‌است

حکم : $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$

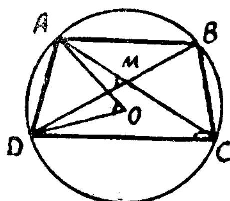
حل — فصل مشترک AB و AD را با دایره O' بترتیب E و F مینامیم . کافیست ثابت کنیم که دوکمان EC و CF که در دایرهٔ O' رو بروی دوزاویهٔ محاطی A_1 و A_2 هستند باهم برابرند برای اینکار EF را وصل میکنیم زوایای AFE و ADB محاط در نیمدایره بوده قائمه میباشند پس EF با DB موازی است و ودردایرهٔ O' نقطهٔ C که نقطهٔ تماس مماسی‌است که‌باوتر EF موازی میباشد دروسط کمان EF قرار دارد و داریم :

$\widehat{EC} = \widehat{CF}$ پس $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$

تمرینات

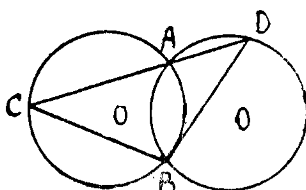
۸۴ - ذوزنقهٔ ABCD در دایرهٔ بمرکز O محاطی است (AB و CD دو قاعدهٔ آن هستند) محل تلاقی دوقطر آنرا M مینامیم . ثابت کنید

$$\widehat{AMD}=\widehat{AOD}$$



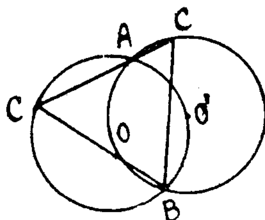
(ش ۱۰۶)

۸۵ — دو دایرهٔ متساوی O و 'O یکدیگر را درنقاط A و B قطع کرده‌اند . از نقطهٔ A خطی رسم می — کنیم کــه دایرهٔ O را در C و دایرهٔ 'O را در D قطع کند . ثابت کنید که مثلث BCD متساوی‌الساقین است.



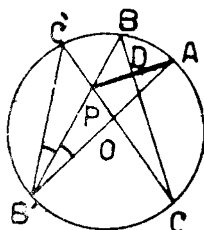
(ش ۱۰۷)

۸۶ — دو دایرهٔ متساوی O و 'O هریك از مرکز دیگری میگذرند و یکدیگر را درنقاط AوB قطع‌مینمایند ازAخطی‌رسم میکنیم که‌دایرهٔ O را در C و دایرهٔ 'Oرادر 'Cقطع کند . ثابت کنید مثلث 'BCC متساوی الاضلاع است (۱۵۶ : ج ۱) (روش دیگر تمرین ۴۶)



(ش ۱۰۸)

۸۷ — نقطهٔ A روی دایرهٔ O و نقطـهٔ P داخل آن مفروض است . وتر BC را که عمود منصف P A میباشد رسم میکنیم خط P B دایره‌را در′B وخط PC دایره‌را در′C قطع می‌نمایند . ثابت کنید :

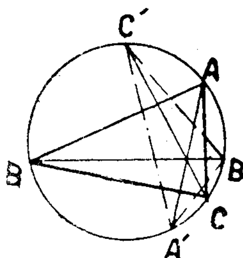


(ش۱۰۹)

$$\widehat{BB'C'}=\widehat{BB'A}$$

راهنمایی ـ CD میانه و ارتفاع مثلث PAC است.

۸۸ — امتـداد ارتفاعات مثلث ABC دایرهٔ محیطی آنرا درنقاط ′A و ′B و ′C قطع می کنند ثابت کنید که این ارتفاعات نیم سازهای زوایای مثلث′A′B′C هستند (۱۶۷:ح۱)

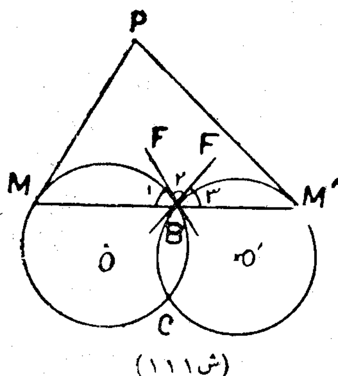


(ش ۱۱۰)

مثال ۲ — دودایـرهٔ O و ′O در نقـاط B وC متقاطع هستند. از نقطهٔ B قاطع ′MBM را رسم کرده ازنقاط M و′M دومماس بر دو دایره رسم میکنیم تا یکدیگر را درنقطهٔ P قطع نمایند . ثابت کنید کـه زاویهٔ این دومماس بازاویهٔ مماسهاییکه از نقطهٔ B بر دودایره رسم شوند برابر است.

فرض: PM و FB بر O مماسند. PM′ و F′B بر O′ مماسند.

حکم : $M\hat{P}M' = F\hat{B}F'$



(ش۱۱۱)

حل- زوایای M و $B_۱$ باهم برابرند (اندازهٔ هریك از آنها نصف اندازهٔ کمان MB است) همچنین و بهمین دلیل زوایای M و $B_۳$ باهم مساویند .

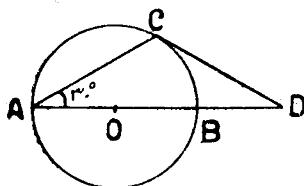
اما $$\hat{B}_۱+\hat{B}_۲+\hat{B}_۳=۱۸۰^\circ \quad (۱)$$

ازطرف‌دیگر $$\hat{M}+\hat{P}+\hat{M}'=۱۸۰^\circ \quad (۲)$$

و چون داریم $\hat{M}=\hat{B}_۱$ و $\hat{M}'=\hat{B}_۳$ از مقایسهٔ روابط (۱) و (۲) حاصل میشود: $\hat{P}=\hat{B}_۲$

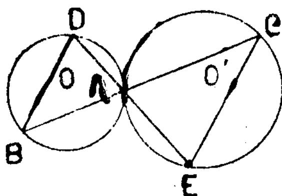
تمرینات

۸۹- دردایرهٔ O قطر AB با وتر AC زاویهٔ ۳۰درجه تشکیل میدهد. مماس در نقطهٔ C بر دایره امتداد قطر AB را در D قطع میکند. ثابت کنید مثلث ACD متساوی‌الساقین است.



(ش ۱۱۲)

۹۰- دو دایرهٔ O و O' درنقطهٔ A مماس خارج هستند ازنقطهٔ A دوقاطع BC و DE را رسم مینماییم (B وD روی دایرهٔO هستند) ثابت کنید که‌زوایای‌دومثلث DBA و ECA نظیر بنظیر باهم برابرند.

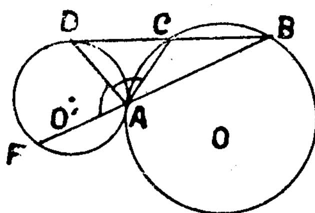


(ش ۱۱۳)

راهنمایی ــ مماس مشترك داخلی دو دایره را رسم‌کنید.

۹۱- مسئلهٔ شمارهٔ ۹۰ را موقعیکه دو دایره مماس‌داخل هستند حل کنید.

۹۲ - دو دایرهٔ O وO' درنقطهٔA مماس‌خارج هستند. از نقطهٔ B واقع بریکی ازآنها مماس BD را بردیگری‌رسم میکنیم. BD دایرهٔاول راباردیگر درنقطهٔC قطع‌مینماید.BA را امتداد میدهیم تادایرهٔ



(ش ۱۱۴)

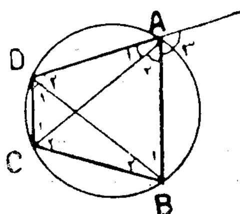
دوم را باز در F قطع کند ثابت کنید که AD نیمساز زاویهٔ CAF است .

راهنمایی ـ مماس مشترك داخلی دو دایره را رسم کنید.

۲۰ـ تبصره ـ چهارضلعی محاطی ـ روش پنجم را درموقعی که دایره‌یی روی شکل رسم نشده باشد میتوان بوسیلهٔ خواص چهارضلعی محاطی بکار برد . برای این کار از تعریف و قضیهٔ زیر استفاده می‌نماییم .

تعریف ـ چهار ضلعی محاطی آنست که هر چهار رأس آن روی یکدایره واقع میباشند .

قضیه ـ درچهارضلعی محدب محاطی :



(ش ۱۱۵)

۱ـ زوایای روبرو مکمل یکدیگر ند:

$$\hat{A}+\hat{C}=\hat{B}+\hat{D}=۱۸۰^\circ$$

۲ـ هر زاویه مساویست با زاویهٔ خارجی روبروی خود :

مثلا $\hat{C}=\hat{A}_۳$

۳ـ زاویهٔ هرضلع با یك قطر مساویست با زاویهٔ ضلع مقابل آن با قطر دیگر :

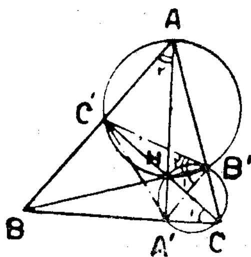
$\hat{A}_۲=\hat{D}_۱$ $\hat{A}_۱=\hat{B}_۲$

$\hat{C}_۲=\hat{D}_۲$ $\hat{C}_۱=\hat{B}_۱$

بعکس : وجود هریك از سه شرط فوق برای آنکه چهارضلعی محدب محاطی باشد کافیست .

درعمل وقتی دانستیم که چهارضلعی محاطی است بهتر است روی شکلی که برای حل مسئله رسم کرده ایم دایرهٔ محیطی را رسم نماییم زیرا دراینصورت آسانتر میتوان زوایای متساوی راکه روبرو بیك کمان هستندمعین کرد و درموقع انشاء حل مسئله نیز بیان ساده‌تر خواهد بود .

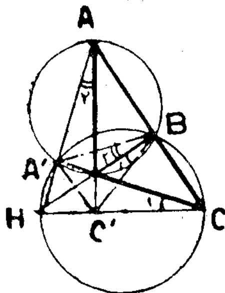
> **مثال-** درمثلث ABC فرض میکنیم هیچیك از زوایا قائمه نباشند و ارتفاعات AA' و BB' و CC' را رسم مینماییم . ثابت کنید که اضلاع و ارتفاعات مثلث ABC شش نیمساز داخلی وخارجی زوایای مثلث $A'B'C'$ هستند .



(ش۱۱۶)

حل- بدواً فرض میکنیم همهٔ زوایای مثلث ABC حاده باشند (ش۱۱۶) ومثلا ثابت میکنیم که $\hat{B}_1=\hat{B}_2$ چون زوایای مثلث همه حاده هستند محل تلاقی ارتفاعات که آنرا Hمینامیم درداخل مثلث واقع است . چهار ضلعی محدب $HA'CB'$ که درآن زوایای $HB'C$ و $HA'C$ قائمه هستند محاطی است و داریم : $\hat{C}_1=\hat{B'}_1$ (روبرو بیك کمان) همچنین در چهارضلعی محاطی $HB'AC'$ داریم $\hat{A}_2=\hat{B'}_2$ اما دو زاویهٔ حادهٔ C_1 و A_2 هردو متمم زاویهٔ B و لذا متساوی هستند پس $\hat{B'}_1=\hat{B'}_2$ یعنی HB' نیمسازداخلی زاویهٔ B' ازمثلث $A'B'C'$ است، بهمین طریق ثابت میشود که HA' و HC'

نیز نیمسازهای داخلی زوایای دیگر مثلث $A'B'C'$ هستند و چون مثلا HA' که نیمساز داخلی زاویهٔ $C'A'B'$ بر BC عمود میباشد بنا براین BC نیمساز خارجی این زاویه میباشد . پس دراین حالت ارتفاعات مثلث ABC نیمسازهای داخلی مثلث $A'B'C'$ و اضلاع مثلث ABC نیمسازهای خارجی زوایای $A'B'C'$ میباشند .



(ش۱۱۷)

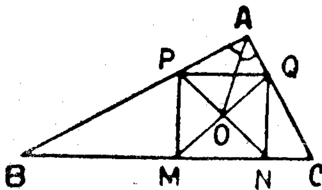
اگر یکی از زوایای مثلث ABC مثلا زاویهٔ B منفرجه باشد بآسانی‌مانند فوق دیده میشود که HB' نیمساز داخلی زاویهٔ B' ازمثلث $A'B'C'$ بوده HA' و HC' نیمسازهای خارجی زوایای A' و C' میباشند .

دراینصورت اضلاع AB و AC بترتیب نیمسازهای داخلی زوایای C' و A' هستند .

اگر مثلث ABC قائم‌الزاویه باشد مثلث $A'B'C'$ وجود نخواهد داشت

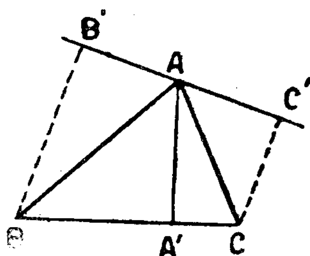
تمرینات

۹۳- درمثلث قائم‌الزاویهٔ ABC ($\hat{A}=۹۰^\circ$) مربعی محاط میکنیم که یك‌ضلع آن برو تر BC قرارداشته باشد . ثابت کنید خطی که رأس A را بمرکز این مربع وصل میکند نیمساز زاویهٔ A میباشد.



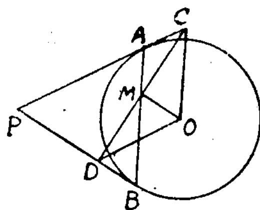
(ش۱۱۸)

۹۴ - مثلث ABC را در نظر گرفته از رأس A خط دلخواهی رسم مینماییم که خارج از زاویهٔ BAC واقع باشد وتصاویر نقاط B و C را روی این خط بترتیب B' و C' مینامیم وارتفاع AA' مثلثABC را نیزمیکشیم. ثابت کنید که زوایای مثلث A'B'C' با زوایای مثلث ABC نظیر بنظیر برابرهستند.



(ش۱۱۹)

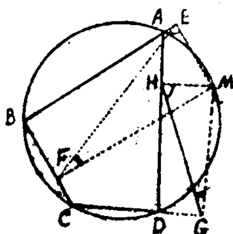
۹۵- از نقطهٔ P واقع در خارج دایرهٔ (O) دو مماس PA و PB را رسم‌نموده ازنقطهٔ دلخواه M واقع برپاره‌خط AB عمودی‌بر MO اخراج میکنیم تا PA را در C و PB را درD قطع کند ثابت کنید مثلث OCD متساوی ـ الساقین است.



(ش ۱۲۰)

راهنمایی - چهار ضلعی‌های OMAC و OMDB محاطی‌هستند.

۹٦ - چهارضلعی ABCD دردایره‌یی‌محاط است ازنقطهٔ M واقع براین دایره عمودهای ME و MF وMG و MH را بترتیب براضلاع AB و BC و CD و AD فرود میآوریم ثابت کنید که زوایای مثلث MGH با



(ش۱۲۱)

زوایای مثلث MFE نظیر بنظیر برابرهستند .
راهنمایی ــ M را به B و D وصل نموده از چهارضلعی های محاطی استفاده کنید .

۲۱ـ روش ششم ـ بوسیلهٔ مقایسهٔ دوزاویه با سایرزوایای شکل یا محاسبهٔ آنها برحسب زوایای معلوم.

غالباً بوسیلهٔ مقایسهٔ دو زاویهٔ مورد بحث با سایر زوایای شکل میتوان تساوی آنها را ثابت نمود . برای اینکار همانطورکه در بارهٔ پاره خطها نیز شرح دادیم (شمارهٔ ۱۴) روش کلی اینست که ثابت کنیم دو زاویهٔ مورد بحث با یك زاویهٔ ثالث یا نظیر بنظیر با دو زاویهٔ متساوی برابر هستند (مثال ۱)

و نیز میتوان بوسیلهٔ محاسبهٔ دو زاویه برحسب زوایای معلوم شکل تساوی آنها را ثابت نمود (مثال ۲) .

برای اینکار ازخواص زیر استفاده می‌نماییم :

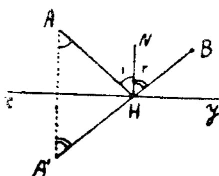
مجموع زوایای هرمثلث مساویست با دوقائمه

هرزاویهٔ خارجی یك‌مثلث مساویست با مجموع زوایای‌داخلی غیرمجاورآن .

مجموع زوایای داخلی یك n ضلعی محدب مساویست با $(n-۲)۲$ قائمه .

مجموع زوایای خارجی هرچند ضلعی محدب مساویست با چهار قائمه وغیره .

مثال ۱- دونقطهٔ A و A' نسبت بخط xy قرینهٔ یکدیگرند و نقطهٔ B با A دریکطرف xy واقع‌است. پاره‌خط BA' خط xy را درنقطهٔ H قطع می‌کند از نقطهٔ H عمود HN را بر xy اخراج مینماییم ثابت کنید $\hat{AHN}=\hat{BHN}$



(ش ۱۲۲)

فرض:
xy عمود منصف AA' است
A و B دریکطرف xy هستند
$xy \perp HN$

حکم: $\hat{AHN}=\hat{BHN}$

حل- دو خط AA' و HN که هردو بر xy عمودند باهم موازی می‌باشند. نظر باین دو متوازی و قاطع AH داریم: $\hat{A}=\hat{H}_1$ و نظر بدو متوازی مزبور و قاطع $A'H$ داریم $\hat{A'}=\hat{H}_2$

اما مثلث AHA' متساوی‌الساقین است و داریم $\hat{A}=\hat{A'}$ بنابراین زوایای H_1 و H_2 که با دو زاویهٔ متساوی A و A' مساوی‌میباشند باهم برابر هستند.

مثال۲- درمثلث ABC محل تلاقی سه نیمساز داخلی را I و فصل مشترك AI را با BC نقطهٔ D مینامیم و از I عمود IE را بر BC فرود می‌آوریم ثابت کنیدکه زاویهٔ BID با زاویهٔ EIC مساویست (۸۳ : ح ۱)

حل ۱ - مثلث‌های OAB و OAC هر دو قائم‌الزاویه هستند (B=C=۹۰) و چون نقطهٔ M دروسط وتر مشترك OA واقع است پاره‌خط های MB وMC میانه‌های وارد بر وتر این دو مثلث قائم‌الزاویه بوده هریك مساوی نصف وتر OA میباشند پس مثلث BMC متساوی‌الساقین است و میانهٔ MN این مثلث بر قاعدهٔ آن یعنی BC عمود میباشد .

حل ۲ - چهارضلعی OBAC که در آن دو زاویهٔ روبرو یعنی B و C قائمه هستند محاطی است و OA قطر ونقطهٔ M مرکز دایرهٔ محیطی آن میباشد پس خط MN که مرکز دایرهٔ محیطی را بنقطهٔN وسط وترBC ازاین دایره وصل میکند بر BC عمود است .

تبصره - و نیز میتوان ازخواص زیرکه همه ناشی ازخواص مثلث متساوی‌الساقین هستند استفاده نمود :

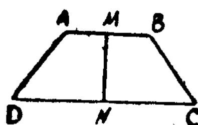
د - خطی‌که مرکز یك دایره را بوسط یك کمان وصل‌کند عمود منصف وتر آن‌کمان میباشد .

هـ - درهر دایره خطی‌که اوساط دو کمان روبروی یك وتر را بهم وصل نماید عمود منصف آن وتر است .

و - خط‌المرکزین دو دایرهٔ متقاطع بر وتر مشترك آنها عمود است .

تمرینات

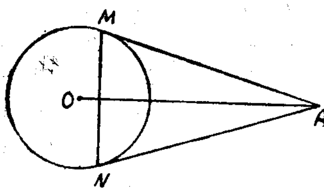
۱۰۵ - ثابت کنید در هر ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین خطی که اوساط دو قاعده را بهم وصل میکند بر دو قاعده عمود است (۶۸ : ح ۱)



(ش ۱۳۶)

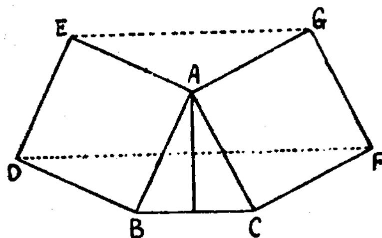
راهنمایی ــ مثلث CMD متساوی‌الساقین است.

۱۰۶- از نقطه A دومماس AM و AN را بر دایرهٔ O رسم میکنیم ثابت کنید OA بر وتر MN عمود است



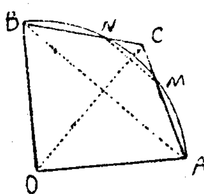
(ش ۱۳۷)

۱۰۷- روی دو ساق AB وAC از یك مثلث متساوی‌ـ الساقین و در خارج مثلث دو مربع ABDE وACFG را رسم‌میکنیم اگر M وسط قاعدهٔBC باشد ثابت کنید AM بر EG و DF عمود است .



(ش ۱۳۸)

۱۰۸- ربع دایرهٔ AOB را در نظر گرفته دو وتر متساوی AM و BN را رسم میکنیم و آنها را امتداد میدهیم تا خطوط حاصل یکدیگر را در نقطهٔ C قطع نمایند ثابت کنید OC بر AB و MN عمود است

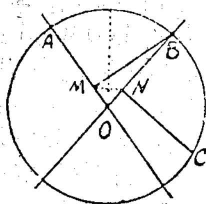


(ش۱۳۹)

۱۰۹- در دایرهٔ O دوکمان AB و BC متساویند .

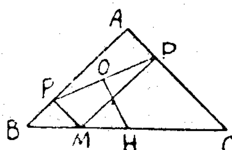
از نقطهٔ B عمود BM را برخط OA و از نقطهٔ C عمود CN را برخط OB فرود میآوریم ثابت کنید MN بر نیمساز زاویهٔ AOB عمود است

راهنمایی ــ مثلث MON متساوی‌الساقین است



(ش ۱۴۰)

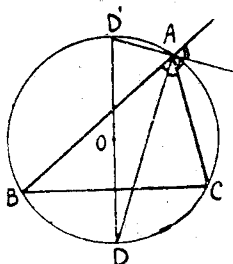
۱۱۰ ــ مثلث قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین ABC $(AB=AC)$ مفروض است از نقطهٔ M واقع بر وتر BC عمودهای MP و 'MP را بترتیب بر AB و AC فرود آورده وسط 'PP را O و وسط BC را H مینامیم ثابت کنید OH بر 'PP عمود است



(ش ۱۴۱)

راهنمایی ــ نقاط A و P و M و H و 'P روی یك دایره واقع اند.

۱۱۱ ــ مثلث ABC در دایرهٔ بمرکز O محاط است نیمساز داخلی زاویهٔ A دایرهٔ O را در نقطهٔ D و نیمساز خارجی آن دایره را درنقطهٔ 'D قطع میکنند. ثابت کنید 'DD بر BC عمود است



(ش ۱۴۲)

راهنمایی ــ ازخاصیت ﻫ شمارهٔ ۲۳ استفاده کنید

۱۱۲ ــ در دایرهٔ O وتر AB را رسم کرده روی آن

نقطه‌یی مانند D اختیار مینماییم و این نقطه را بنقطهٔ دلخواه C از دایره وصل میکنیم. عمودمنصف پاره‌خط AD عمود منصف پاره‌خط CD را در M قطع میکند. ثابت کنید OM بر AC عمود است

(ش ۱۴۳)

راهنمایی ـ ازاینکه نقطهٔ M از نقاط A و D و C بیك فاصله است و از خاصیت و شمارهٔ ۲۳ استفاده کنید .

۲۴ــ روش دوم ـ بوسیلهٔ خواص مثلث قائم‌الزاویه

ثابت میکنیم که دو خط مورد بحث اضلاع زاویهٔ قائمهٔ یك مثلث‌قائم‌الزاویه هستند و برای اینکار از خواص‌زیراستفاده میکنیم:

یك مثلث قائم‌الزاویه است درصورتیکه :

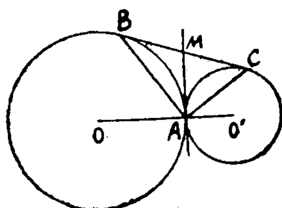
الفـ در یك نیمدایره محاط باشد

ب ـ دو زاویهٔ آن متمم یکدیگر باشند

ج ـ میانهٔ نظیر یك ضلع نصف همان ضلع باشد

د ـ مربع اندازهٔ یك‌ضلع مساوی مجموع مربعات اندازه‌های دو ضلع دیگر باشد

مثال ۱ ـ دو دایرهٔ O و 'O در نقطهٔ A مماس خارج هستند . یکی از دومماس‌مشترك خارج آنها را رسم‌کرده نقاط تماس آنرا با دایرهٔ O نقطهٔ B و با دایرهٔ 'O نقطهٔ C می‌نامیم ثابت کنید AB بر AC عمود است .



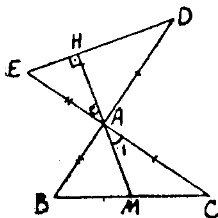
(ش ١٤٤)

فرض: O و O' درنقطهٔ A مماس خارج هستند BC بر O و O' مماس است .

حکم : $AC \perp AB$

حل ـ مماس مشترك داخلی دو دایره‌را رسم میکنیم تا BC را در M قطع کند . دومماس MA و MB که از نقطهٔ M بر دایره O رسم شده‌اند متساوی میباشند و بهمین دلیل MC با MA مساوی است پس نتیجه میشود $MA=MB=MC$ یعنی M وسط BC بوده و میانهٔ AM مثلث ABC مساوی نصف ضلع BC است و بنا براین مثلث ABC قائم‌الزاویه و AC برAB عموداست.

مثال ۲ـ مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC ($\hat{A}=90^\circ$) را درنظرگرفته ضلع BA را باندازهٔ AD مساوی با AC وضلع AC را باندازهٔ AE مساوی باAB امتداد میدهیم ثابت‌کنیدکه میانهٔ AM مثلث برDEعموداست



(ش ١٤٥)

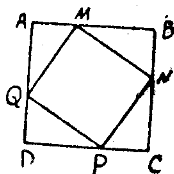
فرض:
$B\hat{A}C=90^\circ$
$AE=AB$ و $AD=AC$
$C\hat{A}D=B\hat{A}E=90^\circ$
$MC=MB$

حکم : $AM \perp ED$

حل — دومثلث قائم‌الزاویهٔ ABC و AED متساویند ودر نتیجه $\hat{B}=\hat{E}$ ازطرف دیگر میانهٔ AMمثلث ABC مساوی نصف‌وتر BC است ومثلث MAC متساوی‌الساقین می‌باشد یعنی $\hat{C}=A_1$ واز طرف دیگر داریم $\hat{A}_1=\hat{A}_2$ (متقابل برأس) اما $\hat{B}+\hat{C}=90^\circ$ پس $\hat{E}+\hat{A}_2=90^\circ$ یعنی درمثلث AEH مجموع دوزاویه ۹۰درجه‌است پس زاویهٔ سوم‌آن یعنی زاویهٔ EHA قائمه وAM عمود برED است

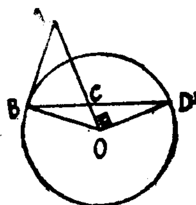
تمرینات

۱۱۳— روی اضلاع مربعABCD نقاط M وN وP وQ را قسمی اختیار میکنیم که AM=BN=CP=DQ باشد ثابت‌کنید MNPQ مربع است.



(ش ۱٤٦)

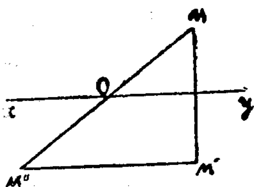
۱۱۴— مثلث متساوی الساقین ABC ‏(AB=AC) را در نظر گرفته از B عمودی بر AB اخراج میکنیم تاامتداد AC را درO قطع‌کند وبمرکز O و بشعاع OB دایره یی رسم میکنیم. این دایره امتداد BC را درنقطهٔ Dقطع مینماید ثابت‌کنید ODعمود برOAاست



(ش ۱٤۷)

۱۱۵— نقطهٔ O را روی خط xy و نقطهٔ M را در

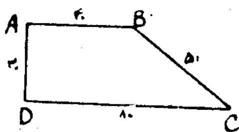
خارج آن درنظر گرفته قرینه‌های نقطهٔ M را نسبت بخط xy و نقطهٔ O بترتیب M' و M'' مینامیم. ثابت کنید که MM' بر M'M'' عمود است (شرط ج)



(ش ۱۴۸)

۱۱۶- در ذوزنقهٔ ABCD قاعدهٔ کوچکتر AB مساوی ۴۰ سانتیمتر و قاعدهٔ بزرگتر CD مساوی ۸۰ سانتیمتر ودو ضلع غیرمتوازی BC مساوی ۵۰ و AD مساوی ۳۰ سانتیمتراست. ثابت کنید که این ذوزنقه قائم‌الزاویه است.

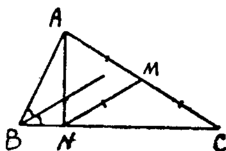
راهنمایی - خط BM را موازی با AD رسم کرده ثابت کنید که زاویهٔ M قائمه است.



(ش ۱۴۹)

۱۱۷ - در مثلث ABC زاویهٔ B دو برابر زاویهٔ O است. از نقطهٔ M وسط AC خطی بموازات نیمساز زاویهٔ B رسم میکنیم تا BC را در N قطع کند. ثابت کنید AN بر BC عمود است.

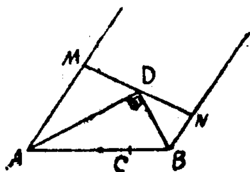
راهنمایی - MN نصف AC است،



(ش ۱۵۰)

۱۱۸ - روی پاره‌خط AB نقطهٔ دلخواه C را انتخاب کرده از A و B دوخط متوازی دریك طرف AB رسم‌مینماییم

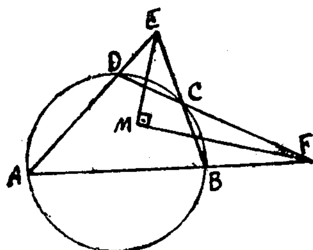
و روی این دو متوازی طول AM را مساوی AC وطول BM را مساوی BC جدا می‌کنیم ووسط پاره‌خط MN را D مینامیم. ثابت کنید زاویهٔ ∀DB قائمه است.



(ش ۱۵۱)

راهنمایی ـ ثابت کنید دایره‌یی که بقطر AB رسم شود از D میگذرد (بتمرین ۱۴۵ مراجعه کنید.

۱۱۹ـ ثابت کنید که نیمساز های زوایایی که از تقاطع امتداد اضلاع مقابل یك چهارضلعی محدب محاطی تشکیل میشود برهم عمودند (۱۷۵ : ح ۱)

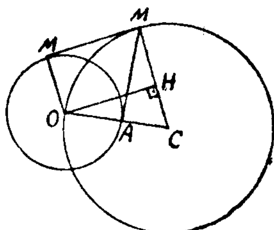


(ش ۱۵۲)

۲۵ـ روش سوم بوسیلهٔ تساوی زوایا

ثابت میکنیم زاویهٔ دو خط مورد بحث با یك زاویهٔ قائمه که روی شکل رسم شده‌است مساوی میباشدو برای اینکار ازمندرجات فصل دوم استفاده میکنیم.

مثال ـ نقطهٔ C واقع در خارج دایرهٔ (O) را مرکز قرار داده بشعاع CO دایره یی رسم میکنیم و مماس مشترك خارجی 'MM دودایره (O) و (C) را میکشیم ('M روی C) خطالمرکزین دودایره، دایرهٔ (O)را درنقطهٔ A قطع میکند. ثابت کنید که M'A بر OC عمود است.



(ش ۱۵۳)

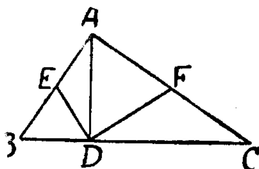
فرض
$OC < OA$
دایرهٔ (C) از
O میگذرد
'MM مماس
بر(O) و(C)

حکم : $OC \perp AM'$

حل — باید ثابت کنیم زاویهٔ M'AC قائمه است . برای اینکار از نقطهٔ O خط OH را بموازات 'MM رسم میکنیم در دو مثلث OHC و M'AC داریم $CM' = CO$ (شعاع دایرهٔ C) و زاویهٔ C در ایندو مثلث مشترك است و $AC = CH$ (هر دو مساوی تفاضل دوشعاع میباشند) پس ایندومثلث متساویند و زاویهٔ M'AC مساویست باH یعنی ۹۰درجه.

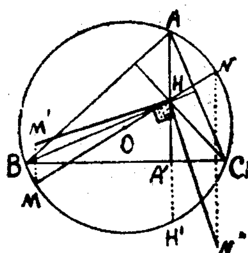
تمرینات

۱۲۰— در مثلث قائم الزاویهٔ ABC ($\hat{A} = 90^\circ$) نقطهٔ D پای ارتفاع AD را به نقاط E و F که بترتیب دروسط AB و AC واقع هستند وصل میکنیم . ثابت کنید زاویهٔ EDF قائمه است.



(ش ۱۵٤)

۱۲۱— مثلث ABC دردایرهٔ O محاط است قطر MN از دایرهٔ O را که ازنقطهٔ H محل تلاقی ارتفاعات مثلث



(ش ۱۵۵)

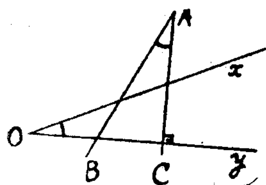
میگذرد رسم می‌کنیم اگر M' قرینهٔ M و N' قرینهٔ N نسبت بخط BC باشند ثابت‌کنید زاویهٔ M'HN' قائمه‌است.

راهنمایی- ارتفاع AA' را امتداد دهید تا دایره را درنقطهٔ H' قطع‌کند وازمثال۲شمارهٔ(۹) استفاده کنید

۴۶- روش چهارم - بوسیلهٔ زوایایی که اضلاعشان برهم عمودند

درشمارهٔ ۱۸ قضیهٔ زیررا خاطرنشان‌کردیم :

هرگاه اضلاع دوزاویه نظیر بنظیر برهم عمود بوده دو زاویهٔ مزبور هردو حاده یاهردو منفرجه باشند آندو زاویه باهم برابرند.

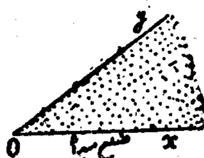


(ش ۱۵۶)

عکس این قضیه‌همیشه‌صحیح نیست یعنی ممکن‌است دو زاویهٔ حاده باهم برابر بوده یك‌ضلع‌از اولی بریك ضلع از دومی عمود باشد ولی دوضلع دیگرآنها برهم عمود نباشند(ش۱۵۶)

برای‌آنکه‌بتوانیم ازعکس این‌قضیه‌برای حل‌مسائل استفاده نماییم جهت زوایا را درنظرمیگیریم . باین‌طریق :

یك ضلع از زاویهٔ xOy مثلا Ox را ضلع مبدأ مینامیم .

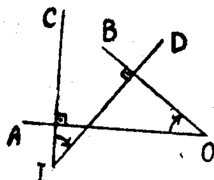


(ش ۱۵۷)

دراینصورت جهت زاویه عباوت ازجهتی است که بایدضلع مبدأ درآنجهت‌دوران کند تازاویه‌را پیموده‌برضلع‌دیگرمنطبق گردد . (همواره زوایای محدب را در نظرمیگیریم) .

برای آنکه برسانیم که Ox ضلع مبدأ زاویهٔ xOy است درموقع نوشتن حرف متعلق بضلــع مبدأ را درطرف چپ مینویسیم : xOy و در موقع خواندن می‌گوییم : زاویهٔ xOy ابتدا از Ox .

حال دو زاویه‌که اضلاعشان نطیر بنظیر برهم عمود هستند مانند AOB و CID در نظر گــرفته (ش ۱۵۸) وقرار میگذاریم‌که ضلع‌مبدأ هردو زاویه از اضلاعی که برهم عمود هستند انتخاب شود : مثلا اگر ضلع مبدأ زاویهٔ AOB را OA اختیارنماییم ضلغ مبدأ زاویهٔ CID ضلع CI (عمود بر OA) خواهد بود .

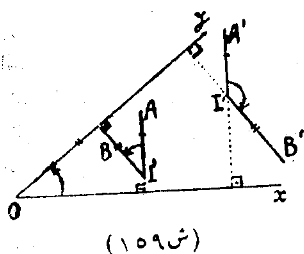


(ش ۱۵۸)

بااین قرارداد قضیهٔ مزبور بصورت زیر بیان میشود ودیگر لازم نیست شرط حاده یا منفرجه بودن زوایا را ذکرکنیم :

قضیه ـ هرگاه اضلاع دو زاویه نظیر بنظیر برهم عمود باشند ودوضلع‌عمود برهم‌را برای آندو زاویه مبدأ اختیارکنیم اگر آندو زاویه دارای یك‌جهت باشند متساویند واگر درخلاف جهت یکدیگر باشند باهم مکمل هستند .

روی شکل ۱۵۹ دو زاویهٔ xOy و AIB که دوضلع مبدئشان Ox و IA برهم عمود و دو ضلع دیگرشان نیز برهم عمود میباشند و دارای یك جهت هم هستند (خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت) باهم مساویند ولی دو زاویهٔ xOy و A'I'B' که اضلاع مبدئشان Ox و I'A' برهم و دوضلع دیگرشان نیز برهم عمودند و دارای یکجهت نیستند مکمل یکدیگرمیباشد :



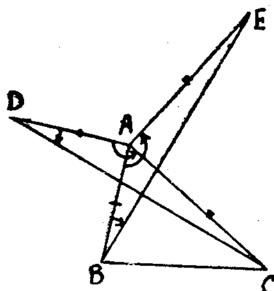
(ش ۱۵۹)

عکس قضیهٔ مزبور چنین است :

قضیهٔ عکس - هرگاه دو زاویه باهم مساوی بوده یك ضلع از اولی بر یك ضلع از دومی عمود باشد و اگر همین دوضلع را برای دوزایه مبدأ اختیارکنیم دو زاویه دارای یکجهت باشند دوضلع دیگر آنها نیز برهم عمود خواهند بود .

از این خاصیت برای آنکه ثابت کنیم دوخط برهم عمودند میتوان استفاده کرد :

مثال ۱- مثلث ABC را درنظرگرفته عمود AD مساوی با AB را بر AB اخراج می‌کنیم بطوریکه نقاط C و D در دو طرف خط AB واقع شوند و عمود AE مساوی با AC را بر AC اخراج مینماییم بطوریکه نقاط E و B در دو طرف خط AC قرار گیرند ثابت کنید DC بر BE عمود است .



(ش ۱۶۰ :)

فرض:
$AD \perp AB$ و $AD = AB$
$AE \perp AC$ و $AE = AC$

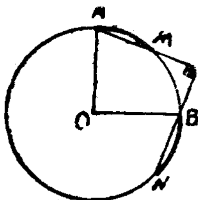
حکم : $BE \perp CD$

حل- در دومثلث ADC و ABE بنا بفرض اضلاع AD و AB باهم و اضلاع AC و AE باهم برابرند و دو زاویهٔ DAC و BAE ابتدا از اضلاع AD و AB هردو دارای یك جهت هستند و اضلاعشان نظیر بنظیر برهم عمودند پس این دو زاویه باهم مساوی میباشندبنا براین‌دومثلث ADC وABE باهم مساوی‌هستند وازتساوی آنها نتیجه میشود $A\hat{B}E = A\hat{D}C$ اما اضلاع AD و AB ازاین دو زاویه برهم عمودند و دو زاویه ابتدا از این دوضلع دارای یکجهت هستند پس دوضلع دیگرشان یعنی DC و BE برهم عمود میباشند .

تمرینات

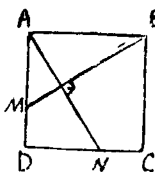
۱۲۲- اگر اضلاع دوزاویهٔ حاده برهم عمود باشند ثابت کنید نیمسازهای داخلی یا (خارجی) آنها برهم عمودند .

۱۲۳- در دایرهٔ O دوشعاع OA و OB را عمود برهم رسم کرده از A و B و در یکجهت دوکمان متساوی AM و BN را روی دایره جدا میکنیم . ثابت کنیدکه خط AM بر خط BN عمود است .



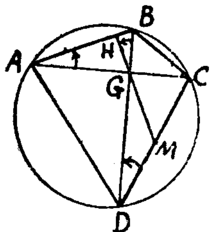
(ش ۱۶۱)

۱۲۴- درمربع ABCD روی اضلاع AD و DC طولهای متساوی AM و DN را جدا کرده نقطهٔ B را به M و نقطهٔ A را به N وصل می‌نماییم. ثابت کنید که AN و BM برهم عمودند .



(ش ۱٦۲)

۱۲۵- چهارضلعی ABCD که اقطارش در نقطهٔ G برهم عمودند در دایرهٔ O محاط است و اگر M وسط ضلع CD باشد ثابت کنید خط MG در نقطه‌یی مانند H بر AB عمود است .

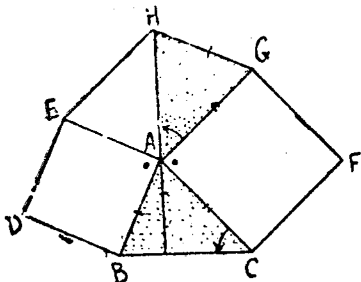


راهنمایی - دو زاویهٔ CAB و BGH متساویند .

(ش ۱٦۳)

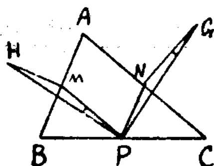
۱۲٦- روی اضلاع AB و AC از مثلث ABC و در خارج این مثلث دو مربع ABDE و ACFG و بعد متوازی‌الاضلاع AEHG را بنا می کنیم ثابت کنید AH=BC و AH بر BC عمود است.

راهنمایی- دومثلث GHA و ABC متساویند .



(ش ۱٦٤)

۱۲۷- از نقاط M و N که بترتیب در وسط اضلاع AB و AC از مثلث ABC واقع اند دوعمود MH و NG را در خارج مثلث بر این دوضلع اخراج میکنیم بطوریکه $MH = \frac{AB}{2}$ و $NG = \frac{AC}{2}$ باشد و نقاط H و G را بنقطهٔ P وسط BC وصل می‌کنیم . ثابت کنید زاویهٔ HPG قائمه است .

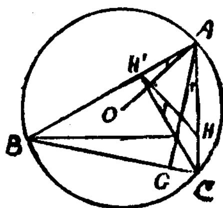


(ش ۱٦٥)

راهنمایی ــ تساوی زوایای G و P از دو مثلث PNG و HMP را ثابت کنید .

(این مسئله را درشمارهٔ ۷۶ جلد اول حل‌المسائل براه دیگری حل کرده‌ایم) .

۱۲۸- ثابت کنید که درمثلث ABC خط HH' که پاهای دو ارتفاع BH و CH' را بهم وصل میکند بر شعاع OA از دایرهٔ محیطی مثلث عمود است



(ش۱٦٦)

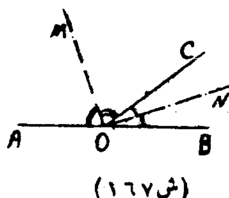
راهنمایی ــ تساوی دوزاویهٔ A_1 و H'_1 را ثابت کنید .

(این مسئله را درمثال شمارهٔ۲۸ همین کتاب براه‌دیگری‌حل کرده‌ایم)

۲۷ــ روش پنجم ـ بوسیلهٔ خاصیت نیمسازهای دوزاویهٔ مجاور و مکمل

ازخاصیت زیر استفاده می‌کنیم :

هرگاه دوزاویهٔ مجاور مکمل یکدیگر باشند نیمسازهای آنها برهم عمودند (۳ : ح ۱)

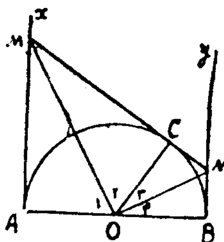


(ش۱٦۷)

$$\hat{MON}=\hat{MOC}+\hat{CON}$$

$$=\frac{\hat{AOC}}{۲}+\frac{\hat{COB}}{۲}=\frac{۱۸۰}{۲}=۹۰^{\circ}$$

مثال - از دو انتهای قطر AB نیمدایرهٔ O دو مماس Ax و By را برآن رسم کرده ازنقطهٔ دلخواه C واقع برنیمدایره مماسی برآن رسم می‌نماییم تا دو مماس اول را بترتیب در M و N قطع نماید. ثابت کنید زاویهٔ MON قائمه است (۱۲۶ ، ح ۱)



(ش۱٦۸)

فرض:
$$Ax \perp OA$$
$$By \perp OB$$
$$NM \perp OC$$

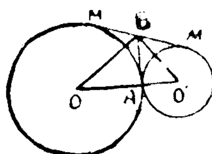
حکم: $ON \perp OM$

حل— دو زاویهٔ AOC و BOC مکمل ومجاور یکدیگرند

OM نیمساز زاویهٔ AOC (تساوی دو مثلث AOM و COM) و ON نیمساز زاویهٔ COB میباشد (تساوی دومثلث CON و BON) پس این دو نیمساز برهم عمودند .

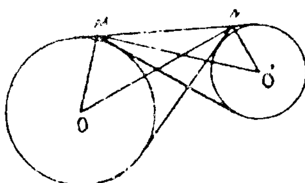
تمرینات

۱۲۹- دو دایرهٔ O و 'O باهم درنقطهٔ A مماس خارج هستند مماس مشترك خارجی آنها 'MM و مماس مشترك داخلی آنها را رسم می‌کنیم تا یکدیگررا درنقطهٔ B قطع کنند . ثابت کنید مثلث 'OBO قائم ـ الزاویه است .



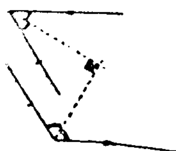
(ش۱۶۹)

۱۳۰- دو دایرهٔ متخارج O و 'O را درنظر گرفته مماسهای مشترك داخلی آنها ویك مماس مشترك خارجی آنهارارسم میکنیم. مماس مشترك خارجی دو مماس دیگررا در نقاط M وN قطع می‌کند . ثابت کنید OM بر O'M (و ON بر O'N) عمود است.

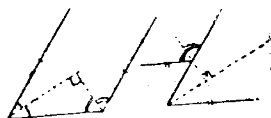


(ش ۱۷۰)

تبصره- برای بکار بردن این طریقه لازم نیست که دو زاویهٔ مکمل مجاور یکدیگر باشند بلکه کافیست که اضلاع این دو زاویهٔ مکمل نظیر بنظیر باهم موازی باشند (ش ۱۷۱) یا دوضلع آنها برهم منطبق بوده دوضلع دیگرشان باهم موازی باشند (ش ۱۷۲)



(ش۱۷۱)

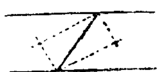


(ش۱۷۲)

مثلا درمسئله‌یی‌که بعنوان‌مثال حل کردیم‌خطوط OM و ON نیمسازهای زوایای AMN و BNM میباشند و دوضلع ایندو زاویه که مکمل یکدیگرهستند برهم منطبق و دو ضلع دیگرشان باهم موازی است .

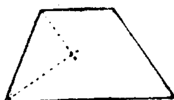
تمرینات

۱۳۱- ثابت کنید هرگاه دوخط متوازی را خط ثالثی قطع کند نیمسازهای زوایای داخلی که باین طریق بدست می‌آید یك مستطیل تشکیل میدهند .



(ش۱۷۳)

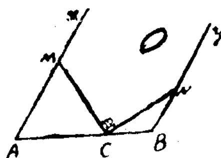
۱۳۲- ثابت کنید که نیمسازهای داخلی دوزاویهٔ مجاور بیکی از دوضلع غیرمتوازی یك‌ذوزنقه برهم عمودند .



(ش۱۷۴)

۱۳۳- ثابت کنید که نیمسازهای زوایای هر متوازی‌الاضلاع یك مستطیل تشکیل میدهند (۶۱ : ح ۱)

۱۳۴- از دوسر پاره‌خط AB دو نیم‌خط متوازی Ax و By را در یك طرف AB رسم‌نموده نقطه‌یی مانند C روی پاره خط AB اختیار میکنیم و طول AM



(ش۱۷۵)

مساوی با AC را روی Ox و طول BN مساوی با BC را روی By جدا می‌کنیم ثابت کنید زاویهٔ MCN قائمه است . (۱ ح : ۲۷)

راهنمایی- از C خطی بموازات Ax رسم کنید .

۲۸ــ روش ششم - بوسیله خواص خطوط متوازی

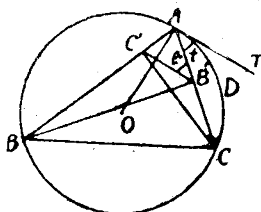
از خواص زیر استفاده می‌نماییم :

هرگاه دوخط باهم موازی باشند هر خط که بریکی از آنها عمود باشد بر دیگری نیز عمود است .

و بعکس: اگر دوخط برهم عمود باشند هر خط که با یکی از آنها موازی باشد بردیگری عموداست .

مثال- ثابت کنید که درهرمثلث خطی که پاهای ارتفاعات وارد از دو رأس‌را بهم وصل میکند بر شعاع دایرهٔ محیطی که از رأس سوم رسم شود عمود است . (۱ ح : ۱۷۲)

(این‌مسئله را بطریق دیگری میتوان حل کرد. رجوع کنید بتمرین شمارهٔ ۱۲۸ همین‌کتاب)



(ش ۱۷۲)

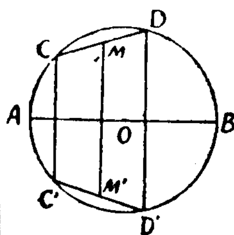
فرض:
$BB' \perp AC$
$CC' \perp AB$
O مرکز دایرهٔ ABC

حکم : $OA \perp B'C'$

حل– مماسی که از رأس A بر دایرهٔ محیطی مثلث رسم شود برشعاع OA عمود است پس برای اثبات اینکه OA بر B'C' عمود میباشد کافیست ثابت کنیم که AT با B'C' موازی است . بعبارت دیگر کافیست ثابت کنیم $\hat{t} = \hat{b'}$. اما داریم $\hat{t} = A\hat{B}C$ زیرا اندازهٔ هریك ازاین دو زاویه مساوی با نصف اندازهٔ کمان ADC است . از طرف دیگر چهارضلعی CBC'B' محاطی است زیرا دایرهٔ بقطر BC ازنقاط B' و C' میگذرد پس زوایای ABC و C'B'C' مکمل یکدیگرند و چون b' نیز مکمل زاویهٔ C'B'C است پس $\hat{b'} = A\hat{B}C$ وازآنجا نتیجه میشود $\hat{b'} = t$ وحکم ثابت است.

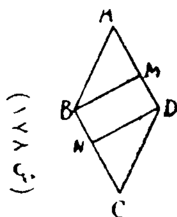
تمرينات

۱۳۵– در دایرهٔ O دو وتر CC' وDD' را عمود برقطرAB رسم کرده CD و C'D' را می‌کشیم . ثابت کنید که خط MM' که وسط CD را بوسط C'D' وصل میکند برAB عمود است.



(ش ۱۷۷)

۱۳۶ – درلوزی ABCD خط BM را عمود بر AD وخط DN را عمود بر BC رسم می‌کنیم. ثابت کنید شکل BMDN مستطیل است .



(ش ۱۷۸)

۱۳۷- دودایرهٔ O و O' متخارج هستند . مماس مشترك خارجی MM' آنها را رسم کرده خطالمرکزین OO' را می‌کشیم تادایرهٔ O را درنقاط A و B و دایرهٔ O را در نقاط A' و B' قطع کند (مطابق شکل) ثابت کنید دوخط MA و M'B' برهم و دو خط MB و M'A' برهم عمودند .

(ش۱۷۹)

راهنمایی ـ MA با MA' موازی است .

۱۳۸- صورتمسئلهٔ ۱۳۷ را درصورتیکه MM' مماس مشترك داخلی دو دایره باشد تصحیح‌کرده آنرا حل کنید.

۱۳۹- مسئلهٔ ۱۳۷ را درصورتیکه دو دایره مماس خارج‌باشند (دراین صورت نقاط B و A' بر نقطهٔ تماس که آنرا C می‌نامیم منطبق میشوند) حل‌کنید .

(ش ۱۸۰)

۱۴۰- از نقطهٔ P دومماس PA و PB را بر دایرهٔ O رسم می‌کنیم . عمود منصف پاره‌خط PO خط PA را درنقطهٔ C قطع می‌کند . ثابت کنید که OC و OB برهم عمودند .

(ش۱۸۱)

۱۴۱- تصویر نقطهٔ P متعلق بدایرهٔ O را برقطر AB ازهمین دایره نقطهٔ P' مینامیم. نیمساز زاویهٔ OPP' دایره را در نقطهٔ C قطع می‌کند. ثابت کنید که OC بر AB عمود است.

(ش ۱۸۲)

۱۴۲- درمثلث متساوی‌الساقین ABC (AB=AC) اگر O محل تلاقی سه عمود منصف اضلاع باشد عمود OI وارد برضلع AB را باندازهٔ ID مساوی با IO امتداد میدهیم و از D خطی بموازات AC رسم می‌کنیم تا BC را در E قطع کند. ثابت کنید DO بر OE عمود است : (۷۳ ح ۱)

(ش ۱۸۳)

راهنمایی- فصل مشترك DE را با AB نقطهٔ M بنامید وثابت کنید M وسط IB است و نتیجه بگیرید که OE با AB موازی است.

۱۴۳- نیمدایرهٔ بقطر AB و نقطهٔ M را برآن درنظر می‌گیریم و از M مماسی بر نیمدایره رسم می‌کنیم تا مماس های در A و B را بترتیب در A' و B' قطع کند و خطوط AB' و A'B را رسم کرده فصل مشترك آنها را N می نامیم ثابت کنید

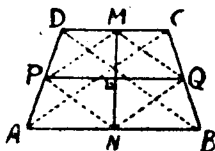
(ش ۱۸۴)

که MN بر AB عمود است (۲۹۰ : ح ۱)
راهنمایی- ازتشابه مثلث ها نتیجه بگیرید MN با AA′ موازی است .

۲۹ ــ روش هفتم - بوسیلهٔ خواص مربع و لوزی

ازخاصیت زیر استفاده میکنیم :
اقطار هرمربع یا لوزی برهم عمودند :

مثال - درهر ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین خطوطی که اوساط دوقاعده را بهم و اوساط دو ساق را بهم وصل می‌کنند برهم عمودند .



(ش۱۸۵)

فرض $\left\{\begin{array}{l} AB \parallel DC \\ AD = BC \\ MD = MC \\ NA = NB \\ PA = PD \\ QC = QB \end{array}\right.$

حکم : $PQ \perp MN$

حل- در دو مثلث DBC و DBA خطوط MQ و PN که اوساط دوضلع را بهم وصل می‌کنند با ضلع سوم موازی و مساوی نصف آن میباشند پس $MQ = NP = \frac{DB}{۲}$ و $MQ \parallel PN$

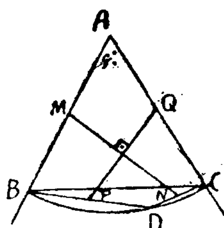
(بهمین دلیل داریم $NP = NQ = \frac{AC}{۲}$ و $MP \parallel NQ$)

پس MPNQ متوازی‌الاضلاع است و بعلاوه چون دو قطر ذوزنقهٔ

متساوی‌الساقین باهم برابرند داریم MQ=QN=NP=MP یعنی MPNQ لوزی است و دو قطر آن برهم عمودند .

تمرینات

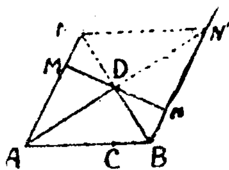
۱۴۴- زاویهٔ xAy مساوی ۶۰ درجه‌را در نظرگرفته بمرکز A و بشعاعی دلخواه کمان BC محصور بین اضلاع اینزاویه را رسم میکنیم و نقطهٔ دلخواه D واقع براین‌کمان را بنقاط B و C وصل مینماییم . ثابت کنید خطی که وسط پاره‌خط DC را بوسط AB وصل میکند برخطی که وسط پاره‌خط DB را بوسط AC وصل می نماید عمود است



(ش ۱۸۶)

۱۴۵- تمرین شمارهٔ ۱۱۸ را با این روش حل‌کنید .

راهنمایی - AD و BD را امتداد دهید تا دومتوازی‌را قطع کنند. شکل حاصل لوزی‌است .



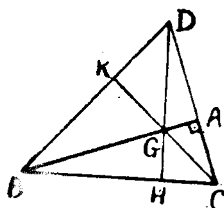
(ش ۱۸۷)

۳۰- روش هشتم - از خاصیت زیر استفاده میکنیم :

سه ارتفاع هرمثلث دریك نقطه متقاربند .

بدینطریق‌که ثابت میکنیم یکـی از دوخط ضلع یك مثلث بوده دیگری خطی است که رأس رو بروی باین ضلع را بنقطهٔ تلاقی ارتفاعات مثلث مزبور وصل می‌کند .

مثال - مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC ($\hat{A}=90°$) را در نظر گرفته نقطهٔ دلخواه D را روی خط AC اختیارمیکنیم و از D عمود DH را بر BC فرود می‌آوریم تا AB یا امتداد آنرا در G قطع کند. ثابت‌کنید CG بر BD عمود است.



(ش۱۸۸)

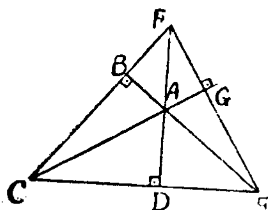
فرض:
$\hat{A}=90°$
نقطهٔ D روی خط AC است
$DH \perp BC$

حکم: $CG \perp BD$

حل - در مثلث BCD خط BA ارتفاع نظیر رأس B و خط DH ارتفاع نظیر رأس D میباشد پس نقطهٔ G محل تقاطع ارتفاعات مثلث BCD است و لذا خط CG که رأس C را باین‌نقطه وصل میکند ارتفاع نظیر رأس C یعنی عمود بر BD است.

تمرینات

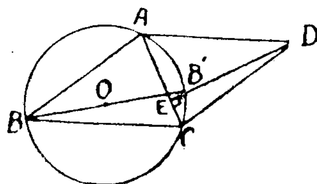
۱۴۶ - درچهارضلعی ABCD امتداد اضلاع AB و CD یکدیگر را درنقطهٔ E و امتداد اضلاع AD وBC یکدیگررا درنقطهٔ F قطع می‌کنند. ثابت کنید اگر دو زاویهٔ B و D



(ش۱۸۹)

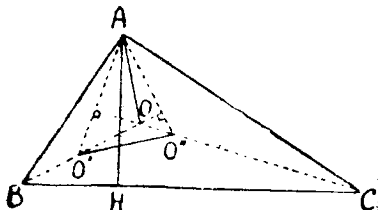
قائمه باشند . قطر AC بر EF عمود است (۷۹ : ح ۱)

۱۴۷- متوازی‌الاضلاع ABCD را در نظر گرفته دایرهٔ محیطی مثلث ABC قطر 'BOB از این دایره را رسم می‌کنیم ثابت کنید خط 'DB بر AC عمود است .



(ش ۱۹۰)

۱۴۸- درمثلث قائم‌الزاویهٔ ABC ($\hat{A}=۹۰^\circ$) ارتفاع AH را رسم‌کرده مراکز دایرهٔ محاطی مثلثهای ABC و ABH و ACH را بترتیب O و 'O و ''O مینامیم . ثابت کنید AO برخط ''O'O عمود است .



(ش ۱۹۱)

راهنمایی - ثابت کنید خط O'O بر ''AO وخط O''O بر 'AO عمود است .

فصل چهارم

چگونه ثابت‌کنیم‌که دوخط متوازیند ؟

۳۱ ـ روش اول ـ بوسیلهٔ خواص زوایایی‌که از تقاطع دو خط متوازی با یك خط قاطع پدید می‌آیند

از خاصیت های زیر که عکس خواص مذکور در شمارهٔ ۱۷ می‌باشند استفاده می‌کنیم :

هرگاه دو خط را خط ثالثی قطع کند آندو خط متوازیند

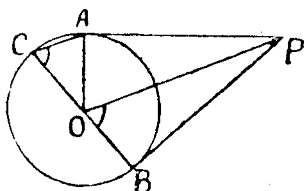
درصورتیکه :

دو زاویهٔ متبادل داخلی (یا خارجی) باهم مساوی باشند.

یا : دو زاویهٔ متقابل داخلی (یا خارجی) باهم مکمل باشند

یا : دو زاویهٔ متقابل داخلی و خارجی باهم مساوی باشند .

مثال ـ از نقطهٔ P واقع درخارج دایرهٔ O مماس های PA و PB را برآن رسم‌کرده نقطهٔ A را بنقطهٔ C انتهای قطر BOC وصل می‌کنیم . ثابت کنیدکه AC با PO موازی است .



(ش ۱۹۲)

فرض
$PA \perp OA$
$PB \perp OB$
قطر BC

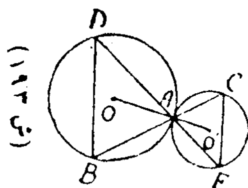
حکم: AC با OP موازیست

حل— زاویهٔ C محاطی و اندازه آن مساوی است با نصف اندازهٔ کمان $\widehat{AB}$ زاویهٔ AOB مرکزی و اندازه اش مساوی است با اندازهٔ کمان AB و میدانیم که OP نیمساز زاویهٔ AOB است پس اندازهٔ زاویهٔ POB مساوی است با نصف اندازهٔ کمان $\widehat{AB}$ و داریم $\hat{C}=P\hat{O}B$ اما این دو زاویه نسبت بدو خط CA و OP و قاطع CB متقابل داخلی و خارجی هستند بنابراین AC با OP موازی است .

تمرین

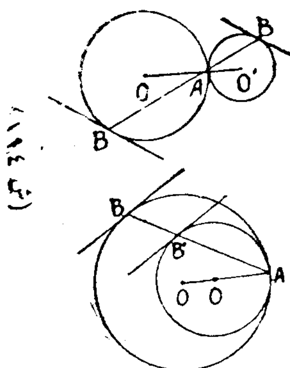
درموقع حل کردن مسائل زیر باید این نکته را درنظرداشت که برای مقایسهٔ زوایای شکل هروقت دو دایره باهم در نقطه‌یی مماس باشند رسم مماس مشترك آنها که از نقطهٔ تماس میگذرد و هروقت دو دایره متقاطع باشند رسم وتر مشترك آنها مفید است.

۱۴۹- از A نقطهٔ تماس دو دایرهٔ مماس خارج دو وتر BAC و DAE را رسم می کنیم . ثابت کنید BD با CE موازی است.



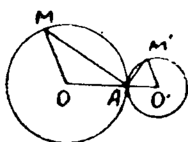
(ش ۱۹۰)

۱۵۰ - اگر ازنقطهٔ تماس دودایرهٔ مماس‌قاطع BB' را رسم‌کنیم‌مماسهایی که در نقاط B و B' بر دودایره‌رسم‌شوندمتوازیند (۱۶۱ : ح ۱)



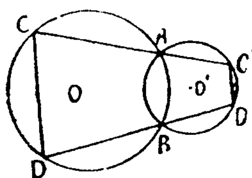
(ش ۱۹۴)

۱۵۱- دو دایرهٔ O و O' در نقطهٔ A مماس خــارج هستند. دردایرهٔ O وتر AM را باختیار رسم کرده در دایرهٔ O' وتر AM' را عمود برAM رسم میکنیم ثابت‌کنید OM باO'M' موازی است .



(ش ۱۹۵)

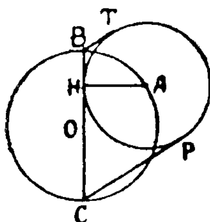
۱۵۲- دودایرهٔ O و O' درنقاط A و B متخارج‌هستند. از A قاطع دلخواه CAC' و از B نیز قاطع دلخواه DBD' را رسم میکنیم . ثابت‌کنید CD با C'D' موازی است (۱۷۱ : ح ۱) .



(ش ۱۹۶)

راهنمایی ـ زوایای ACD وAC'D' مکمل‌یکدیگرند .

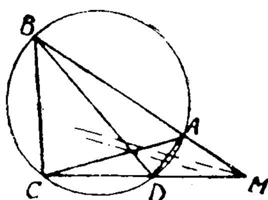
۱۵۳- دایرهٔ بمرکز **O** و بقطر **BC** ونقطهٔ **A** را روی آن درنظرگرفته دایرهٔ دیگری بمرکز **A** چنان رسم میکنیم که با قطر **BC** مماس باشد وازنقاط **B** و **C** دو مماس بر این دایره رسم میکنیم . ثابت کنید ایندو مماس باهم موازیند .



(ش ۱۹۷)

راهنمایی ـ زوایای **B** و **C** مکمل یکدیگرند .

۱۵۴- چهارضلعی **ABCD** در دایرهٔ **O** محاط است و امتداد اضلاع‌متقابل **AB** و **CD** یکدیگررا درنقطهٔ **M** قطع میکند . ثابت کنید نیمساز زاویهٔ **M** با نیمساز یکی از زوایای‌دو قطر چهار ضلعی موازی، است .



(ش۱۹۸)

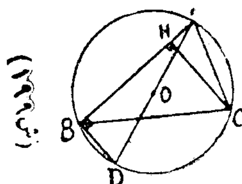
راهنمایی ـ اندازهٔ زاویه‌یی را که نیمساز زاویهٔ **M** با یکی از دو قطرتشکیل میدهد و همچنین اندازهٔ نصف زاویهٔ دو قطر را برحسب اندازهٔ کمانها بنویسید .

۳۲ ـ روش دوم ـ بوسیلهٔ استفاده از یك عمود مشترك

از خاصیت زیر استفاده می‌کنیم :

دو خط که بریك خط ثالث عمود باشند باهم موازیند .

مثال - مثلث ABC و دایرهٔ محیطی آنرا در نظر گرفته ارتفاع CH وقطر AD از دایرهٔ محیطی را رسم میکنیم . ثابت کنید DB با CH موازی است.



(ش۱۹۹)

فرض $\begin{cases} AB \perp CH \\ \text{AD قطر دایرهٔ ABC} \end{cases}$

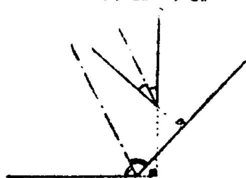
حکم : $CH \parallel BD$

حل - زاویهٔ ABD محاط در نیمدایره قائمه است پس دو خط CH و BD هردو بر AB عمود هستند و لذا باهم موازیند .

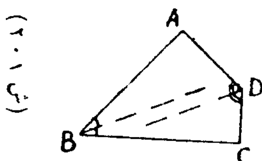
تمرینات

۱۵۵- هرگاه اضلاع دو زاویه نظیر بنظیر بر یکدیگر عمود بوده یکی از آن دوزاویه حاده و دیگری منفرجه باشد نیمسازهای آنها باهم موازیند ،

راهنمایی - یك ضلع زاویهٔ منفرجه را امتداد داده ازتمرین شمارهٔ ۱۲۲ استفاده کنید .


(ش۲۰۰)

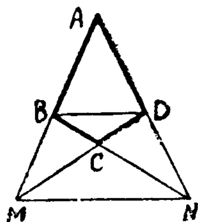
۱۵۶ - هرگـاه دو زاویهٔ متقابل یك چهارضلعی قائمه باشند نیمسازهای دو زاویهٔ دیگر باهم موازی اند .



(ش۲۰۱)

راهنمایی - از تمرین ۱۵۵ استفاده کنید .

۱۵۷- در چهارضلعی **ABCD** داریم **AB = AD** و **BC = CD** اضلاع متقابل را امتداد میدهیم تا یکدیگر را در نقاط **M** و **N** قطع کنند ثابت کنید که **MN** با **BD** موازی است .



(۲۰۲ ج)

۳۳ - روش سوم - بوسیلهٔ خواص متوازی‌الاضلاع

از تعریف متوازی‌الاضلاع استفاده میکنیم :

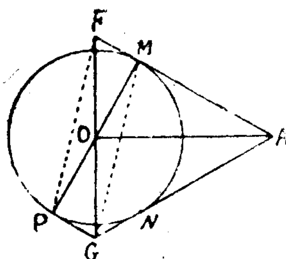
متوازی‌الاضلاع چهارضلعی است که اضلاع آن دو بدو متوازی باشند .

یعنی ثابت میکنیم که دو خط مورد بحث اضلاع روبروی یك متوازی‌الاضلاع هستند (بشمارهٔ ۱۱ مراجعه کنید) .

بطریق دیگری نیز میتوان از این روش استفاده نمود :

ثابت میکنیم دو نقطه از خط دوم دریکطرف خط اول واقع بوده بیك فاصله ازآن قرار دارند .

مثال ۱- از نقطهٔ **A** واقع در خارج دایرهٔ **O** دو مماس **AM** و **AN** را بر آن رسم کرده قطر **MOP** را میکشیم وقطر عمود بر **OA** را نیز رسم میکنیم تا خط **AN** را در نقطهٔ **G** و خط **AM** را در نقطهٔ **F** قطع کند . ثابت کنید **PG** با **AM** موازی است .



(ش ۳-۲)

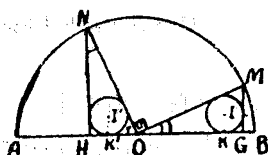
فرض: AM و AN مماس بر O
MP قطر دایره
FOG عمود بر OA

حکم : AM ∥ PG

حل — PF و MG را رسم میکنیم تا چهارضلعی PFMG بدست آید دو قطر این چهار ضلعی در نقطهٔ O متقاطع هستند و نقطهٔ O در وسط هریك ازآنها قرار دارد زیرا از طرفی PM قطر دایره و O مرکز آنست و از طرف دیگر مثلث FAG که در آن OA هم ارتفاع نظیر رأس A و هم نیمساز زاویهٔ A است متساوی‌ـ الساقین میباشد پس O وسط FG است .

بنابراین چهارضلعی PFMG متوازی‌الاضلاع است و AM با PG موازی است .

مثال ۲ - در نیمدایرهٔ بقطر AB و مرکز O دو شعاع عمود برهم OM و ON را رسم کرده از M و N عمود های MG و NH را بر قطر AB فرود می‌آوریم و مرکز دایرهٔ محاطی مثلث MOG را I و مرکز دایرهٔ محاطی مثلث NOH را 'I مبنامیم ثابت کنید 'II با AB موازی است .



(ش ۲۰۴)

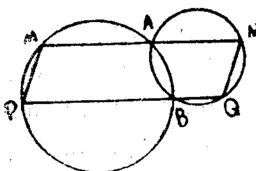
فرض
$ON \perp OM$
$AB \perp NH$ و MG
I مرکز دایرهٔ محاطی OMG
I' مرکز دایرهٔ محاطی ONH

حکم : $AB \parallel II'$

حل— دو مثلث قائم‌الزاویهٔ OMG و NOH (در حالت وتر یك زاویهٔ حاده) باهم مساویند ($OM=ON$ و $\hat{O}_1 = \hat{N}$ زیرا هر دو متمم $\hat{O}_2$ میباشند (بنا براین شعاعهای دوایر محاطی این دو مثلث نیز متساویند $IK = I'K'$ یعنی نقاط I و I' از AB بیك فاصله قرار دارند و بنا براین II' با AB موازی است .

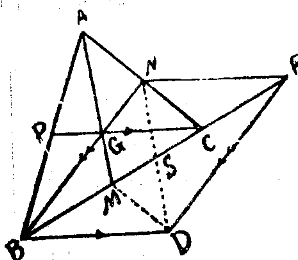
تمرینات

۱۵۸- ازنقاط تقاطع A و B دو دایرهٔ متقاطع دو وتر متوازی MAN و PBQ را رسم میکنیم . ثابت کنید که MP با NQ مساوی وموازی است .



(ش ۲۰۵)

۱۵۹- میانه‌های AM و BN و CP از مثلث ABC را رسم کرده از نقطهٔ N خطی بموازات CP میکشیم تا خط BC را درنقطه‌یی مانند F قطع کند سپس از F خطی بموازات BN و از B

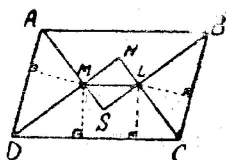


(ش ۲۰۶)

خطی بموازات CP رسم میکنیم . ایندو خط یکدیگررا در نقطه D قطع می‌کنند ثابت کنید که DM با AC و DN با AM موازی است .

راهنمایی ـ فصل‌مشترك ND وBC را S نامیده ملاحظه کنید که S هم وسط ND وهم وسط MC میباشد .

۱۶۰ـ ثابت کنید که نیمسازهای زوایای‌داخلی یك‌متوازی‌الاضلاع مستطیلی تشکیل می‌دهند که اقطارش موازی بااضلاع متوازی‌الاضلاع است (۶۱ : ح ۱)



(ش ۲۰۷)

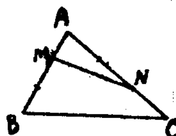
۳۴ـ روش چهارم ـ بوسیلهٔ عکس قضیهٔ طالس و نتایج‌آن

ازخاصیت های زیر استفاده میکنیم :

الف ـ عکس قضیهٔ طالس ـ هرگاه خطی دوضلع مثلثی را یکسان * بپاره‌خطهای متناسب تقسیم نماید با ضلع سوم موازی‌است

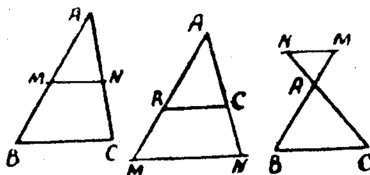
---

* مقصو ازذکر کلمهٔ یکسان اینست که باید پاره‌خطهای متناسب نظیر بنظیر نسبت بخط قاطع دارای یك‌وضع‌باشند روی شکل مقابل ملاحظه کنید که خط MN اضلاعAB وAC ازمثلث ABC را بپاره‌خطهای متناسب تقسیم‌کرده‌است $\frac{MB}{MA}=\frac{NA}{NB}=۲$ ولی‌باضلع BC موازی نیست زیرا پاره‌خط های متناظر MB و NA نسبت بقاطع MN یك وضع دارا نیستند یعنی یکی از آنها دریکطرف NM ودیگری درطرف دیگر قرار دارد .



(ش ۲۰۸)

اگرصحت یکی از سه رابطهٔ (۱) زیر را ثابت کنیم نتیجه میشود که خط MN با BC موازی است :



(ش ۲۰۹)

$$\frac{MB}{AB}=\frac{NC}{AC} \text{ و } \frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC} \text{ و } \frac{AM}{MB}=\frac{AN}{NC}$$

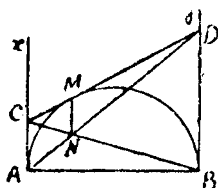
این سه رابطه ازیکدیگر مستقل نیستند و هریك ازآنها را میتوان ازروی دیگری بابکاربردن خاصیت‌های تناسب بدست آورد.

ب ــ حالت خاص ــ در کتاب اول هندسه قضیهٔ زیررا که حالت خاصی ازعکس قضیهٔ طالس است ثابت کرده‌ایم :

خطی‌که اوساط دوضلع مثلث را بهم وصل کند با ضلع سوم موازی است .

مثال ــ از دو انتهای A و B قطر نیمدایرهٔ O مماسهای Ax وBy را براین نیمدایره رسم‌کرده از نقطهٔ دلخواه M واقع بر نیمدایره نیز مماسی برآن رسم میکنیم تا Ax را درنقطهٔ C و By را در نقطهٔ D قطع‌کند . سپس AD وBC را کشیده نقطه تقاطع آنهارا N مینامیم. ثابت‌کنید MN با AC موازی‌است

(۱) یا هررابطهٔ دیگری‌که از روی‌آنها بکاربردن خاصیت‌های تناسب بدست آید .



(ش ۲۱۰)

فرض: Ax و By و CD بر دایرهٔ O مماس هستند
AB قطر دایره است

حکم: AC ∥ MN

حل ـ خطوط CA و DB که هر دو بر AB عمودند باهم موازی میباشند. درمثلث NBC خط AC بموازات ضلع BD رسم شده است و داریم:

$$(1) \quad \frac{AN}{ND} = \frac{AC}{BD}$$

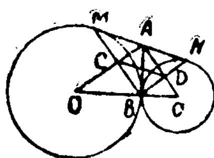
از طرف دیگر AC=MC و BD=DM (مماسهای مرسوم از یك نقطه) پس رابطهٔ (۱) باینصورت درمی‌آید:

$$\frac{AN}{ND} = \frac{CM}{MD}$$

از این رابطه نتیجه میشودکه خط MN که اضلاع DC و AD از مثلث ACD را یکسان بیك نسبت تقسیم کرده است باضلع AC موازی است.

تمرینات

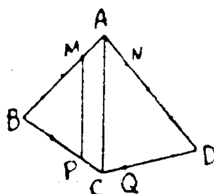
۱۶۱ ـ دو دایرهٔ O و O' در نقطهٔ B مماس خارج هستند. یکی از دو مماس مشترك خارجی آنها MN و مماس داخلی آنهارا نیز رسم می‌نماییم تا یکدیگر را درنقطهٔ A قطع کنند و OA و O'A را رسم میکنیم تا بترتیب MB و NB را



(ش ۲۱۱)

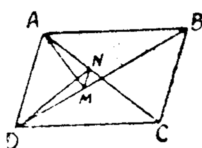
در C و D قطع کنند . ثابت کنید CD با MN موازی است.

۱۶۲- روی اضلاع چهارضلعی ABCD طولهای AM و AN را بترتیب مساوی با یك چهارم AB و AD و طولهای CP و CQ را بترتیب مساوی با یك چهارم CB و CD جدا میکنیم . ثابت کنید که خطی که دونقطهٔ مجاور را بهم وصل میکند با یکی از دو قطر چهار ضلعی موازی است .



(ش ۲۱۲)

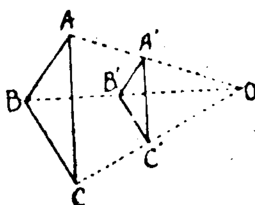
۱۶۳- نیمسازهای زوایای A و D از متوازی‌الاضلاع ABCD را رسم میکنیم تا اقطار DB و AC را بترتیب در نقاط M و N قطع کنند . ثابت کنید که MN با AD موازی است



(ش ۲۱۳)

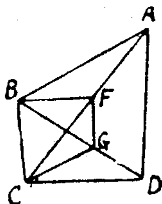
راهنمایی - از قضیهٔ مربوط به پاره‌خطهایی که روی ضلع مثلث بوسیلهٔ نیمساززاویهٔ مقابل آن پدید میآید استفاده کنید.

۱۶۴- سه رأس مثلث ABC را بنقطهٔ دلخواه O وصل کرده روی OA نقطهٔ A' را اختیار می‌کنیم و از A' خط A'B' را بموازات AB و خط A'C را بموازات AC رسم میکنیم (نقاط B' و C' روی OB و OC واقع اند) ثابت کنید که B'C' با BC موازی است .



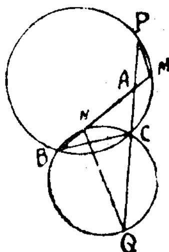
(ش ۲۱۴)

۱٦۵- چهارضلعی ABCD را در نظرگرفته از نقطهٔ B خطی بموازات CD رسم میکنیم تا AC را درنقطهٔ E قطع کند و از C خطی بموازات AB رسم میکنیم تا BD را درنقطهٔ G قطع نماید. ثابت کنید FG با AD موازی است.



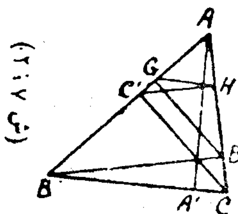
(ش۲۱۵)

۱٦٦- مثلث ABC را در نظرگرفته دو دایره رسم میکنیم که ازنقاط B و C بگذرند. دایرهٔ اول خط AB را در M و خط AC را در P قطع می‌کند و دایرهٔ دوم خط AB را در N و خط AC را درQ تلاقی مینماید. ثابت کنید که MP با NQ موازی است.



(ش ۲۱٦)

۱٦۷ - ارتفاعات مثلث ABC را ′AA و ′BB و ′CC نامیده از ′C عمود C′H را بر AC و از ′B عمود B′G را بر AB فرود می‌آوریم. ثابت کنید که GH با BB موازی است.



(ش ۲۱۷)

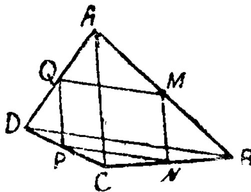
۳۵- روش پنجم - بوسیلهٔ یك موازی مشترك

از خاصیت زیر استفاده میکنیم:

اگر دوخط باخط ثالثی‌موازی باشند خودشان‌متوازی‌هستند.

بنابراین با یکی از روش‌هاییکه قبلا ذکر شد نشان میدهیم. که دو خط مورد بحث با یك خط ثالث موازی هستند .

مثال - اگر اوساط اضلاع یك چهار ضلعی را متوالیاً بهم وصل کنیم شکل‌حاصل متوازی‌الاضلاع است (۱ ح : ۷۰)



(ش ۲۱۸)

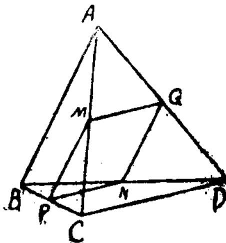
فرض:
$$MA=MB$$
$$NB=NC$$
$$PC=PD$$
$$QD=QA$$

حکم:
$$QM \parallel PN$$
$$QP \parallel MN$$

حل ـ کافیست قطر AC را رسم‌کرده ملاحظه کنیم که QP و MN هر دو با AC موازیند و همچنین QM و PN هردو با DB موازی میباشند .

تمرينات

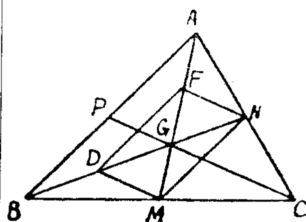
۱٦۸- ثابت کنید که اوساط دو ضلع مقابل و اوساط اقطار هر چهارضلعی رؤس یك‌متوازی‌الاضلاع هستند .



(ش ۲۱۹)

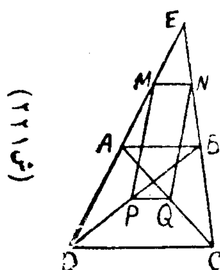
۱٦۹- نقطهٔ تلاقی میانه‌های AM و BN و CP

مثلث ABC را G ووسط AG را F ووسط BG را D مینامیم . ثابت کنید که شکل FDMN متوازی‌ـ الاضلاع است .



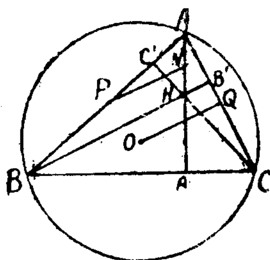
(ش ۲۲۰)

۱۷۰ - ساقهـای ذوزنقهٔ ABCD را امتداد میدهیم تا یکدیگررا در نقطهٔ B قطع کنند و اوساط M و N پاره‌خط های AE و BE را بهم وصل کـرده و اوساط P و Q اقطار AC و BD را نیز بهم وصل می‌کنیم . ثابت کنید MNQP ذوزنقه است.



(ش۲۲۱)

۱۷۱- مثلث ABC و دایرهٔ محیطی آنرا در نظرگرفته محل تقاطع ارتفاعات را H می‌نامیم . ثابت کنید که خطی کـه نقطهٔ N وسط AH را بنقطهٔ P وسط AB وصل کند با خطی که مرکز دایرهٔ محیطی را بنقطهٔ Q وسط AC وصل نماید موازی است و شکل OPNQ متوازی‌الاضلاع است .



(ش۲۲۲)

فصل پنجم

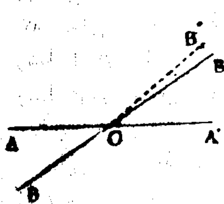
چگونه ثابت کنیم که سه نقطهٔ P و Q و R بریك استقامت هستند؟

۳۶- این مسئله ممکن است بدو صورت متفاوت بیان شود در واقع چه بگوییم که نقاط P و Q و R روی یك خط راست واقع هستند وچه بگوییم که مثلا خط PQ از نقطهٔ R میگذرد در هردو صورت یك مطلب را بیان کرده‌ایم.

برای‌حل‌این‌مسئله دربیشترموارد ازقضیهٔ زیراستفاده‌میکنیم:

قضیهٔ - هرگاه دو زاویه باهم مساوی باشند و یك ضلع از اولی بایك‌ضلع اودومی‌دو نیم‌خط متقابل بوده اضلاع دیگر دردوطرف خط حاصل واقع باشند این دوضلع نیز دونیم‌خط متقابل‌خواهندبود.

یعنی رری یك خط راست و در دو طرف مبدأ مشترکشان واقع می‌باشند.



(ش ۲۲۳)

فرض:
- $\widehat{AOB} = \widehat{A'OB'}$
- OA و OA' دو نیم خط متقابل هستند.
- OB و OB' در دو طرف خط AA' واقع هستند.

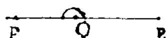
حکم: OB و OB' دو نیم‌خط‌متقابل‌هستند

برهان - اگر OB' در امتداد OB نباشد امتداد آنـرا OB'' مینامیم دراینصورت دوزاویهٔ AOB و $A'OB''$ متقابل برأس هستند وبنابراین متساویند وچون بنابفرض زاویهٔ AOB با $A'OB'$ برابر است پس داریم : $A'\hat{O}B''=A'\hat{O}B$ یعنی OB'' بر QB' منطبق میباشد .

تبصره - این قضیه عکس قضیهٔ زیرمیباشد :

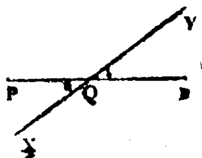
دو زاویهٔ روبرو باهم مساویند

۳۷- روش اول - با استفاده از احکام مربوط به زوایا



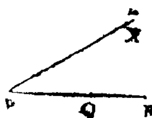
(ش ۲۲٤)

فرض کنیممثلا نقطهٔ Q بین P وR باشد یا ثابت میکنیم که زاویهٔ PQR یك زاویهٔ نیم صفحه است (ش۲۲۴) یا اینکه اگر xy خطی باشد که از Q بگذرد ازقضیهٔ شمارهٔ ۳۶ استفاده کرده ثابت میکنیم که زوایای xQP وyQR متساویند (ش ۲۲۵)



(ش ۲۲۵)

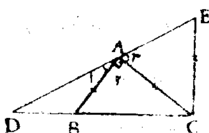
یا اینکه نیمخط Px بمبدأ P را درنظر گرفته ثابت میکنیمزوایای QPx و RPx متساویند (ش۲۲۶)



(ش ۲۲٦)

تبصرهٔ مهم - در ابتدای حل مسئله باید بطور واضح بیان کنیم که کدام نقاط را بهم وصل میکنیم .

مثال ۱ - مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC $(\hat{A}=90^\circ)$ را در نظر گرفته از رأس C عمودی بر وتر BC در نیم صفحه‌یی که شامل مثلث است رسم و روی آن طول CE مساوی با AC را جدا می‌کنیم و وتر BC را بطول BD مساوی با AB امتداد میدهیم. ثابت کنید سه نقطهٔ D و A و E بریك استقامت قراردارند.



(ش ۲۲۷)

فرض:
$$\hat{BAC}=90^\circ$$
$$\hat{CBD}=180^\circ$$
$$\hat{BCE}=90^\circ$$
$$BD=BA$$
$$CE=CA$$

حکم: D و A و E روی یك خط راست هستند.

حل - نقطهٔ A را بنقاط E و D وصل میکنیم کافی است ثابت کنیم که زاویهٔ DAE مساوی ۱۸۰ درجه است.

اما زاویهٔ A_2 بنا بفرض قائمه است پس کافیست ثابت کنیم

$$\hat{A}_1+\hat{A}_3=90^\circ$$

مثلث ABD متساوی‌الساقین است و داریم $\hat{D}=\hat{A}_1$ (۱)

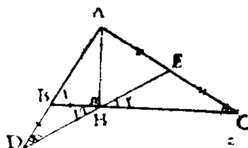
مثلث ACE متساوی الساقین است و داریم $\hat{E}=\hat{A}_۳$ (۲)

اما در مثلث قائما لزاویهٔ DCE ($\hat{DCE}=۹۰^\circ$) داریم :

$\hat{D}+\hat{E}=۹۰^\circ$ این‌رابطه را با درنظر گــرفتن روابط (۱) و (۲)

میتوان چنین نوشت : $\hat{A}_۱+\hat{A}_۳=۹۰^\circ$ و حکم ثابت است .

مثال ۲ - مثلث ABC را که در آن زاویهٔ B حاده و مساوی دو برابر زاویهٔ C است در نظر می‌گیریم و ارتفــاع AH را رسم میکنیم و ضلع AB را باندازهٔ BD مساوی با DH امتداد میدهیم ثابت کنید که نقطهٔ E وسط AC روی خط DH واقع است



(ش ۲۲۸)

فرض:
$\hat{B}_۱=۲\hat{C}$ و $(B_۱<۹۰^\circ)$
$AH \perp BC$
$\hat{ABD}=۱۸۰^\circ$
$BD=BH$
$EA=EC$

حکم : D و H و E روی یك خط راست واقع هستند .

حلـــ نقطهٔ H را بنقاط E و D وصل میکنیم با استفاده ازقضیهٔ شمارهٔ ۳۶ چون نقاط E و D در دوطرف خط راست BHC

واقع هستند کافی است ثابت‌کنیم که $\hat{H}_1=\hat{H}_2$

مثلث BDH متساوی‌الساقین است و داریم $\hat{D}=\hat{H}_1$ و زاویهٔ B_1 که زاویهٔ خارجی این مثلث است مساویست با مجموع دو زاویهٔ H_1 و D : $\hat{B}_1=\hat{D}+\hat{H}_1=۲\hat{H}_1$

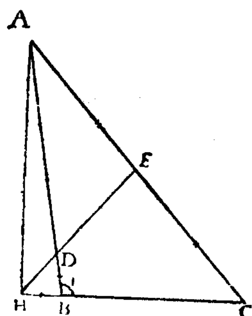
پس $(۱) \quad \hat{H}_1=\frac{\hat{B}_1}{۲}=\hat{C}$

در مثلث قائم‌الزاویهٔ AHC خط HE میانهٔ نظیر وتر AC است پس EH=EC و مثلث HEC متساوی‌الساقین است و داریم $\hat{H}_2=\hat{C}$ (۲) از روابط (۱) و (۲) معلوم میشود که $\hat{H}_1=\hat{H}_2$ و حکم ثابت است .

(دو زاویهٔ H_1 و H_2 متساوی هستند و دوضلع آنها یعنی HB و HC دونیم‌خط متقابل میباشند وبعلاوه دوضلع دیگر زاویه در دوطرف خط BHC قرار دارند پس این دو ضلع یعنی HD و HE بر یك امتداد هستند .)

مثال ۳ - مثلث ABC را که در آن زاویهٔ B منفرجه و مساوی دوبرابر زاویهٔ C است درنظر می‌گیریم و ارتفاع AH را رسم می کنیم و روی ضلع BA ابتدا از B طول BD را مساوی BH جدا می‌کنیم ثابت‌کنید که نقطهٔ E وسط AC روی خط DH واقع است .

این‌همان مثال۲ میباشد اما درحالتی‌که زاویهٔ B منفرجه‌است.



(ش۲۲۹)

حل - نقطهٔ H را بنقاط D و E وصل میکنیم چون نقاط D و E در یکطرف H واقع هستند کافیست ثابت کنیم‌که :

$$\widehat{BHD} = \widehat{BHE}$$

مثلث BDH متساوی‌الساقین است و داریم $\widehat{BHD} = \widehat{BDH}$

و زاویهٔ B_1 که زاویهٔ خارجی این مثلث است مساویست با مجموع دو زاویهٔ BHD و BDH :

$$\widehat{B_1} = \widehat{BDH} + \widehat{BHD} = ۲\widehat{BHD}$$

پس $$\widehat{BHD} = \frac{\widehat{B_1}}{۲} = \widehat{C} \qquad (۱)$$

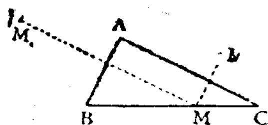
درمثلث قائم‌الزاویهٔ AHC خط HE میانهٔ نظیر وتر AC است پس EH=EC ومثلث EHC متساوی‌الساقین است و داریم :

$$\widehat{BHE} = \widehat{C} \qquad (۲)$$

از روابط (۱) و (۲) نتیجه می‌شود $\widehat{BHD} = \widehat{BHE}$ و حکم ثابت است .

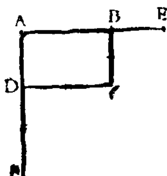
تمرینات

۱۷۲- مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC ($\hat{A}=۹۰^\circ$) را درنظر گرفته نقطهٔ M را روی وتر آن (بین B و C) اختیار می‌کنیم وقرینهٔ M را نسبت باضلاع AB وAC بترتیب $M_۱$ و $M_۲$ می‌نامیم . ثابت‌کنید نقاط $M_۱$ و A و $M_۲$ روی یك‌خط راست واقع است .



(ش ۲۳۰)

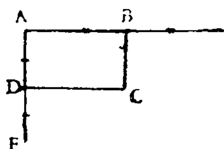
۱۷۳- مستطیل ABCD مفروض است . ضلع AB را باندازهٔ BE مساوی با BC و ضلع AD را باندازهٔ DF مساوی با DC امتداد میدهیم ثابت‌کنید نقاط E و C و F بریك استقامت قرار دارند .



(ش ۲۳۱)

۱۷۴- مسئلهٔ ۱۷۳ را درصورتیکه ABCD متوازی‌الاضلاع باشد حل‌کنید (تمرین ۶۵)

۱۷۵- ضلع AB از مستطیل ABCD را باندازهٔ BE مساوی با AB و ضلع AD از آنرا باندازهٔ DF مساوی باAD امتداد میدهیم ثابت کنید نقاط C و E و F بر یك استقامت قرار دارند .



(ش ۲۳۲)

۱۷۶ - مسئلهٔ ۱۷۵ را در صورتیکه ABCD متوازی‌الاضلاع باشد حل کنید :

راهنمایی ــ هریك از دوشکل BCFD و CDBE متوازی‌الاضلاع هستند .

۱۷۷- از نقطهٔ C واقع در خارج دایرهٔ O دو مماس CA و CB را بر آن رسم کرده قطر AOD را می‌کشیم و AC را باندازهٔ CE مساوی با خودش امتداد میدهیم . ثابت کنید نقاط B و E و D بر یك استقامت هستند (۱۵۸ : ح ۱)

راهنمایی- $\widehat{EBD}=۱۸۰^\circ$

(ش۲۳۳)

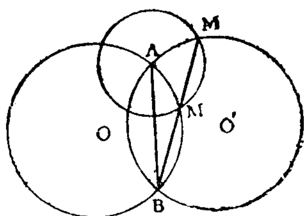
۱۷۸- ثابت کنید که اگر از نقطهٔ M واقع بر دایرهٔ محیطی مثلث ABC عمودهای MD و ME و MF را بترتیب بر اضلاع AB و AC و BC مثلث فرود آوریم نقاط D و E و F (پاهای عمودها) بر یك استقامت قرار دارند (۱۷۶ : ح ۱) ؛

(ش۲۳٤)

راهنمایی- نقطهٔ E را به F و D وصل کرده ثابت کنید :

$\widehat{AED} = \widehat{CEF}$ و برای اینکار از چهارضلعی های محاطی ADME و MEFC استفاده کنید .

۱۷۹- دو دایرهٔ متساوی O و 'O یکدیگر را در نقاط A و B قطع می کنند. بمرکز A دایرهٔ دیگری رسم میکنیم که هریك از دو دایرهٔ O 'O را در دو نقطه قطع کند ثابت کنید که نقطهٔ B با دوتا از نقاط تقاطع مزبور که در یکطرف AB واقع هستند (مانند M و 'M) بریك استقامت میباشد.

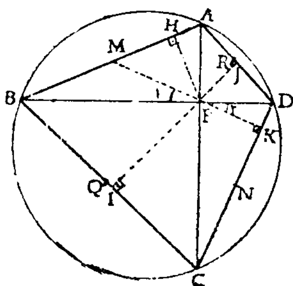


(ش ۲۳۵)

راهنمایی - B را به M و 'M وصل کرده ثابت کنید :

$$\widehat{ABM} = \widehat{ABM'}$$

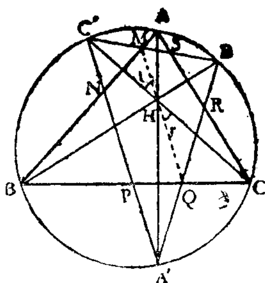
۱۸۰- در دایرهٔ O دو وتر AC و BD را عمود برهم رسم میکنیم تا یکدیگر را در نقطهٔ P قطع کنند و اوساط وترهای AB و BC و CD و DA را بترتیب M و N و Q و R مینامیم و تصاویر نقطهٔ P را روی این وترها بترتیب H و I و K و J میخوانیم. ثابت کنید سه نقطهٔ M و P و K بریك استقامت هستند. سه دسته نقاط دیگر نظیر اینها روی شکل نشان دهید.



(ش ۲۳۶)

راهنمایی - P را به M وصل کرده ثابت کنید دو زاویه P_1 و P_2 متساوی هستند.

۱۸۱- محل تلاقی ارتفاعات مثلث ABC را H نامیده قرینه های H را نسبت باضلاع BC وAC و BA بترتیب A′ و B′ و C′ مینامیم . اضلاع مثلث A′B′C′ اضـلاع مثلث ABC را در شش نقطهٔ M و N وP و Q وR وS مطابق شکل قطع میکنند ثابت کنید که هریك از خطوط MQ و NR و PS از نقطهٔ H میگذرند.



(ش [illegible])

راهنمایی - H را به M و Q وصل کرده از اینکه نقاط A′ و B′ و C′ روی دایرهٔ محیطی مثلث واقع هستند (شمارهٔ ۱۶۵ : ح ۱) استفاده کنید وثابت نمایید که زوایای H_1 و H_2 متساویند .

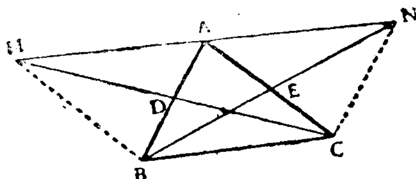
۳۸- روش دوم - بوسیلهٔ خطوط عمودی یا متوازی

ثابت میکنیم کـه خطوط PQ و PR هردو بریك خط عمود یا هردو با یك خط موازی هستند .

مثال - مثلث ABC را درنظر گرفته قرینهٔ رأس C را نسبت بنقطهٔ D وسط AB نقطهٔ M می‌نامیم و قرینهٔ رأسB را نسبت بنقطهٔ E وسط AC نقطهٔ N می‌خوانیم ثابت کنید نقاط M و N و A بر یك استقامت هستند .

فرض
$$\left\{\begin{array}{l} DA=DB \\ EA=EC \\ \hat{BEN}=\hat{CDM}=180^\circ \\ DC=DM \\ EB=EN \end{array}\right.$$

حکم: M و A و N بریك استقامت هستند .

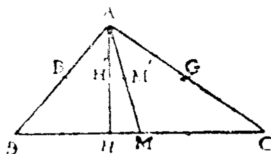


(ش ۲۳۸)

حل— نقطهٔ A را بنقاط M و N وصل میکنیم . چهارضلعی AMBC که اقطار آن درنقطهٔ D یکدیگررا نصف کرده‌اند متوازی‌الاضلاع است ولذا AM با BC موازی است . بهمین دلیل ANCB نیزمتوازی‌الاضلاع است و AN با BC موازی است وچون از نقطهٔ A یك خط بیشتر نمیتوان بموازات BC رسم کرد پس AM و AN در امتداد یکدیگرواقع هستند و حکم ثابت است .

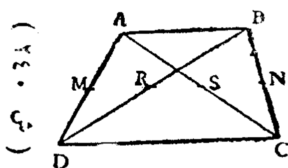
تمرینات

۱۸۲- ثابت کنید که درهر مثلث اوساط اضلاع AB و AC و اوساط ارتفاع AH ومیانهٔ AM روی یك خط راست واقع‌هستند.



(ش ۲۳۹)

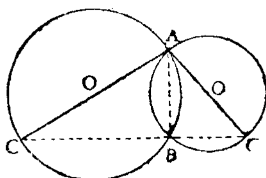
۱۸۳ - ذوزنقهٔ ABCD را در نظر گرفته اوساط اضلاع غیر متوازی AD و BC را بترتیب M و N و اوساط



(ش ۲۴۰)

اقطار را R و S می‌نامیم ثابت‌کنید نقاط M و N و R وS بر یك استقامت قرار دارند.

راهنمایی - MR و MS هردو باقاعده‌های ذوزنقه موازیند.

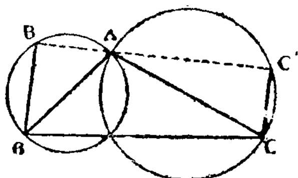


(ش ۲۴۱)

۱۸۴- دو دایرهٔ O و 'O در نقاط A و B متقاطع هستند قطرهای AOC و 'AO'C را رسم میکنیم. ثابت‌کنید نقاط C و 'C و B بر یك استقامت هستند.

راهنمایی - BC و 'BC بریك خط عمودند.

۱۸۵- مثلث ABC را در نظرگرفته و دو دایره یکی بقطر AB ودیگری بقطر AC رسم میکنیم وازنقاط B و C دو وتر متوازی 'BB و 'CC را رسم می‌نماییم. ثایت کنید که 'B'C از رأسA میگذرد (۱ ح : ۱۵۲)

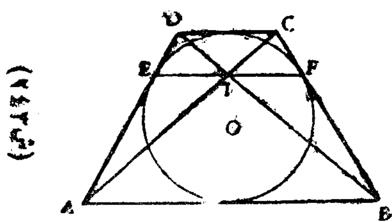


(ش۲۴۲)

راهنمایی - 'AB و 'AG بر دو وتر متوازی عمودند.

۱۸۶- ذوزنقهٔ متساوی‌الساقینی بریك دایره محیط است

ثابت کنید که نقطهٔ تقاطع قطرو نقاط تماس دو ساق با دایره روی یك خط واقع هستند (۲۸۹ : ح ۱)

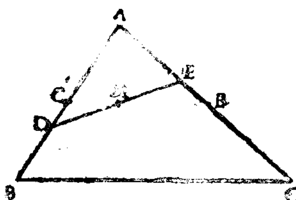


(شکل ۲۴۳)

راهنمایی ـ نقطهٔ تلاقی دو قطر را I نامیده I را به E و F وصل کنید و ثابت نمایید که IE و IF با AB موازی هستند .

۱۸۷ـ مثلث ABC را در نظر گرفته نقطهٔ D را روی AB اختیار میکنیم و نقطهٔ E را روی AC طوری انتخاب می‌نماییم که $\frac{DA}{DB}=\frac{EC}{EA}$ باشد .

ثابت کنید که اوساط اضلاع AB و AC ووسط پاره خط DE روی یك خط راست هستند (۲۵۶ : ح ۱)



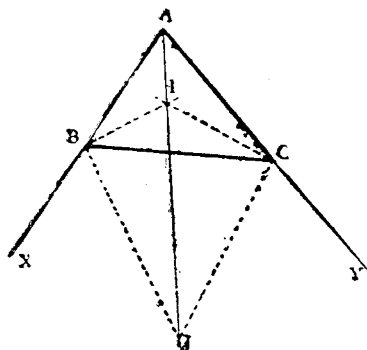
(شکل ۲٤٤)

راهنمایی ـ وسط DE را M بنامید و ثابت کنید C'M C'B' با BC موازی هستند و برای این کار از E خطی بموازات BC رسم کنید تا AB را در F قطع کند.

۳۹ـــ روش سوم ـ بوسیلهٔ مکانهای هندسی

ثابت می‌کنیم که نقاط مورد بحث متعلق بیك مکان هندسی هستند که از یك خط راست تشکیل میشود .

مثال- درمثلث ABC نیمسازهای داخلی زوایای B و C یکدیگررا در نقطهٔ I و نیمسازهای خارجی همین دو زاویه یکدیگررا درنقطهٔ J قطع میکنند . ثابت کنید A و I و J روی یك‌خط راست واقعهستند .



(ش ۲٤٥)

فرض:

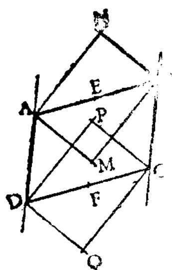
$$\widehat{IBA}=\widehat{IBC}$$
$$\widehat{JCA}=\widehat{ICB}$$
$$\widehat{JBC}=\widehat{JBx}$$
$$\widehat{JCB}=\widehat{JCy}$$

حکم: A و I و J بریك استقامت هستند .

حل– هریك ازنقاط I و J از اضلاع مثلث بیك فاصله هستند و چون این دونقطه داخل زاویهٔ A قرار دارند متعلق بمکان هندسی نقاطی‌هستندکه در داخل زاویهٔ A واقع بوده از دو ضلع آن بیك فاصله باشند یعنی روی‌نیمساز زاویهٔ A واقع هستند بنابراین A و I و J بر یك استقامت قرار دارند .

تمرینات

۱۸۸- نیمسازهای داخلی و خارجی زوایای A و B از متوازی‌الاضلاع ABCD یکدیگررا در M و N قطع میکنند

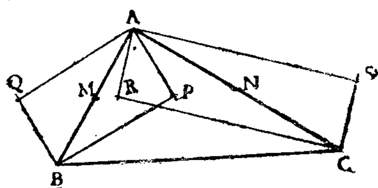


(ش ۲٤٦)

و نیمسازهای داخلی و خارجی زوایای C و D یکدیگر را در نقاط P و Q تلاقی مینمایند. ثابت کنید نقاط M و N و P و Q روی یك خط راست واقع‌هستند و این خط راست از نقاط E و F اوساط اضلاع AB و CD میگذرد .

راهنمایی- تمام این‌نقاط از دوخط AD و BC بیك فاصله هستند .

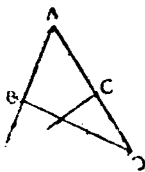
۱۸۹- مثلث ABC را درنظر گرفته رأس A را روی نیمسازهای داخلی وخارجی زاویهٔ B تصویر میکنیم تا نقاط P و Q بدست‌آید ونیز A را روی نیمسازهای داخلی‌وخارجی زاویهٔ C تصویر میکنیم تا نقاط R و S حاصل شوند ثابت کنید که P و Q و R و S روی یك خط راست جا دارند و این خط راست ازنقاط M و N اوساط اضلاع AB و AC میگذرد .



(ش ۲٤۷)

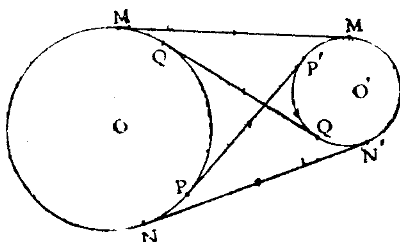
راهنمایی- همهٔ این‌نقاط ازخط BC بیك فاصله هستند

۱۹۰ - روی دو ساق AB و AC ازمثلث متساوی‌الساقین ABC دو طول متساوی BB' و CC' را جدا میکنیم ثابت کنید که نقطهٔ O فصل مشترك BC' و B'C و نقطهٔ M وسط BC و رأس A بریك استقامت هستند .



(ش ۲٤۸)

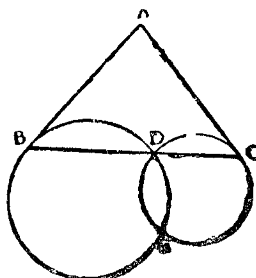
۱۹۱- دو دایرهٔ متخارج O و O' را در نظر گرفته مماسهای مشترك داخلی وخارجی آنها را رسم می‌کنیم ، ثابت کنید اوساط قطعاتی از این مماسها که بین دو نقطه‌تماس محصورند چهار نقطه واقع بر یك استقامت هستند.



(ش ۲۴۹)

راهنمایی ـ همهٔ این نقاط روی محور اصلی دو دایره واقع میباشند .

۱۹۲- روی قاعدهٔ BC از مثلث متساوی‌الساقین ABC نقطهٔ دلخواه D را اختیار کرده دو دایره رسم می‌کنیم که اولی از B و D بگذرد و درنقطهٔ B با AB مماس باشد و دومی از C و D بگذرد و درنقطهٔ C با AC مماس باشد. ایندو دایره یکدیگر را درنقطهٔ دیگری مانند E قطع می‌کنند . ثابت کنید نقاط A و D و E بریك استقامت هستند.



(ش ۲۵۰)

راهنمایی ـ DE محور اصلی دو دایره است .

۴۰ ـ روش چهارم ـ برای آنکه ثابت کنیم سه نقطهٔ P و Q و R بریك استقامت هستند ممکن است فصل مشترك خط QR را

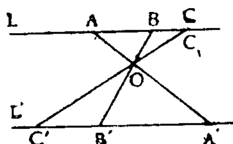
با خط یا دایره‌یی‌که روی شکل رسم شده است P' بنامیم و ثابت کنیم‌که نقاط P و P' برهم منطبق هستند :

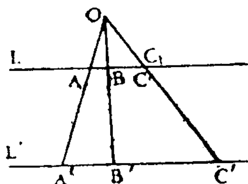
بعنوان مثال قضیهٔ زیررا ازکتاب سوم هندسه ذکر میکنیم . خود این قضیه دربسیاری موارد برای اثبات اینکه سه نقطه بر یك استقامت هستند بکار میرود .

مثال ۱- قضیهٔ (۱)ـ دو خط متوازی، L و L' را در نظر گرفته فرض میکنیم نقاط متوالی A و B و C و......... روی L و نقاط متوالی A' و B' و C' و......... روی L' واقع باشند . اگر داشته باشیم :

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\cdots\cdots$$

خطوط CC' و......... ازنقطهٔ O فصل‌مشترك AA' و BB' می‌گذرد .





(ش ۲۵۱)

فرض:
A و B و C روی خط L واقع هستند و B بین A و C است .
A' و B' و C' روی خط L' واقع هستند و B' بین A' و C' است .
داریم $\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}$
O فصل مشترك AA' و BB' است .

حکم : CC' از O میگذرد.

(۱) این‌قضیه عکس‌قضیهٔ زیر میباشد:خطوط متقارب روی‌دوخط متوازی پاره خط های متناسب پدید می‌آورند .

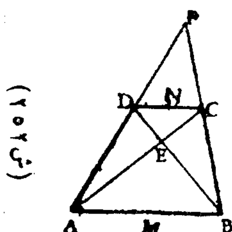
برهان— نقطهٔ O را به C' وصل کرده فصــل مشترك خط OC' را با L نقطهٔ C_1 می‌نامیم ، میدانیم‌که خطوط متقارب روی دو خط متوازی پاره خطهای متناسب پدید می‌آورند یعنی داریم :

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC_1}{B'C'}$$

و چون بنا بفرض‌داریم :
$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}$$

نتیجه میشود که BC_1 و BC متساوی و دارای یك جهت هستند یعنی C_1 بر C منطبق است پس نقاط C و C' و O بریك استقامت هستند :

> **مثال ۲ -** درهر ذوزنقه اوساط دو قاعده و محل تلاقی دوقطر وفصل مشترك امتداد دو ساق چهار نقطه واقع بریك استقامت میباشند (۲۶۸ : ح ۱)



(ش ۲۵۲)

فرض:
DC ∥ AB
ND = NC
MA = MB
E فصل مشترك AC و BD
F فصل مشترك AD و BC

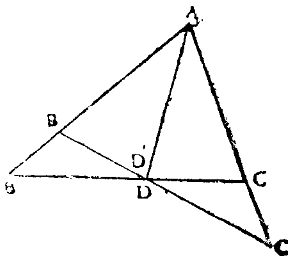
حکم: نقاط M و N و E و F روی یك خط راست هستند .

حل— میتوان نوشت $\frac{DN}{NC}=\frac{AM}{MB}$ پس خطوط AD و BC و MN که روی دوخط متوازی پاره خطهــای متناسب جــدا کرده‌اند بنا بقضیهٔ قبل از یك نقطه میگــذرند یعنی MN از F میگذرد و بهمین‌ترتیب میتوان نوشت $\frac{AM}{MB}=\frac{CN}{ND}$

پس خطوط AC و MN که روی دوخط متوازی پاره‌خطهای متناسب جدا کرده‌اند متقارب هستند یعنی MN از E میگذرد .

تمرینات

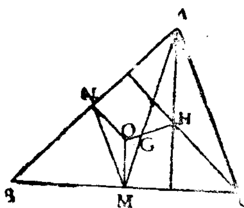
۱۹۳- مثلث ABC را درنظرگرفته نیمساز داخلی زاویهٔ A را رسم میکنیم تا BCرا در نقطهٔ D قطع کند و روی خط AB ابتدا ازA و درجهت از A بطرف C پاره‌خط 'AC را مساوی AB ورویخط AC ابتدا از A و در جهت از A بطرف B پاره خط 'AB را مساوی AC جدا میکنیم ثابت کنیدنقاط 'B و 'C و D بریك‌استقامت هستند .



(ش ۲۵۳)

راهنمایی ــ فصل مشترك 'B'C را با BC نقطهٔ 'D بنامید و ثابت‌کنید 'D بر D منطبق‌است ــ فصل مشترك‌دو خط که نسبت بیك محور قرینهٔ یکدیگر باشند روی محور تقارن واقع است .

۱۹۴- ثابت‌کنید درمثلث ABC نقطهٔ O مرکز دایرهٔ محیطی و نقطهٔ H محل برخورد ارتفاعات و نقطهٔ G محل تلاقی سه میانه بر یك استقامت واقع هستند و داریم $GH = ۲GO$ (۱ ح : ۳۳۸)

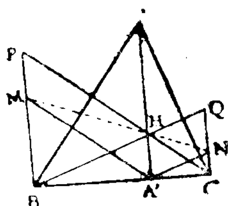


(ش ۲۵۴)

راهنمایی ــ فصل مشترك میانهٔ AM را با خط OH نقطهٔ

نقطهٔ G' بنامید و ثابت کنید G' بر G منطبق است ــ دو مثلث MON و AHC متشابهند .

۱۹۵- ارتفاعات AA' و BB' و CC' از مثلث ABC یکدیگررا درنقطهٔ R قطع‌میکنند از B عمودی برBC اخراج کرده فصل مشترك این عمود را باعمودی که از A' برAB رسم‌شود نقطهٔM وباخطCH نقطهٔP‌مینامیم. همچنین ازC عمودی بر BC رسم کرده فصل مشترك این عمود را با عمودی که از A' بر AC رسم شود نقطهٔ N و با خط BH نقطهٔ Q مینامیم. اولا ثابت کنید



(ش ۲۰۰)

$$\frac{BM}{A'H}=\frac{A'H}{CN}=\frac{BA'}{A'C}$$

ثانیاً ثابت‌کنید‌که نقاط M و H وN روی یك‌خط راست واقع هستند .

راهنمایی ـ از مثال ۱ شمارهٔ ۳۹ استفاده‌کنید .

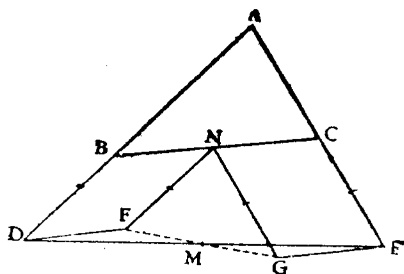
۴۱ - روش پنجم - ثابت میکنیم که نقاط مورد بحث سه نقطهٔ واقع بریك استقامت متعلق بیك شکل معلوم هستند مثلا:

دو رأس یك متوازی‌الاضلاع و وسط یك قطرآن

یا اوساط دوضلع غیرمتوازی یك ذوزنقه و اوسط دوقطرآن

یا مرکز یك دایره و دوسر وتر ومثلث قائم‌الزاویه‌یی‌که در آن محاط باشد و غیره .

مثال- مثلث ABC را درنظر گرفته روی امتداد اضلاع AB و AC طولهای متساوی BD و CE را جدا میکنیم و وسط BC را N و وسط DE را M مینامیم . سپس ازنقاط N و D بترتیب خطوطی بموازات BD و BC رسم‌میکنیم تا یکدیگررا درنقطهٔ F قطع کنند و از نقاط N و E بترتیب خطوطی بموازات CE وBC رسم میکنیم تادرنقطهٔ G یکدیگر را تلاقی نمایند . ثابت کنید که نقاط F و M و G بر یك استقامت هستند .



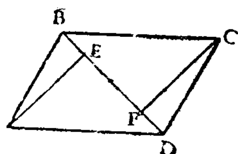
(ش ۲۵۶)

فرض:
NB = NC
MD = ME
NF ∥ BD
DF ∥ BC
NG ∥ CE
EG ∥ BC

حکم: F و M وG بریك استقامت هستند

حل- شکل BNFD متوازی‌الاضلاع است و بنابراین DF با BN مساوی وموازی است همچنین شکل CNGE متوازی‌الاضلاع است و لذا GE با NC مساوی و موازی است از اینجا نتیجه می‌شودکه DF با GE مساوی و موازی بوده شکل DFEG متوازی‌اضلاع است و قطر FG آن ازنقطهٔ M وسط قطر DE می‌گذرد .

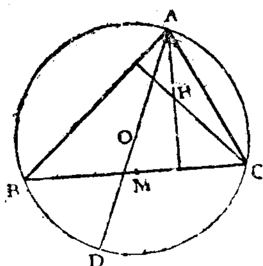
تمرینات



(ش ۲۵۷)

۱۹۶- عمود های AE و CF را برقطر BD از متوازی‌الاضلاع ABCD فرود میاوریم ثابت کنید قطر AC از وسط EF مگذرد .

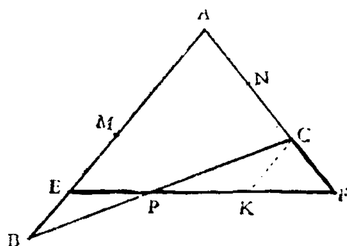
۱۹۷ - مثلث ABC در دایرهٔ O محاط است . نقطهٔ تلاقی ارتفاعات آنرا H مینامیم و A را به O وصل میکنیم تا امتداد آن دایره را در D قطع کند اگر M وسط BC باشد ثابت کنید نقاط D و M و H بریك استقامت هستند



(ش ۲۵۸)

راهنمایی - BDCH متوازی‌الاضلاع است .

۱۹۸- مثلث ABC را درنظر گرفته وسط ضلع AB را M ووسط ضلع AC را N مینامیم و ازنقطه M و در جهت از A بطرف B پاره خطMEرا مساوی با نصفAC و از نقطهٔ N و در جهت ازA بطرف C پاره خط NF



(ش۲۵۹)

را مساوی با نصف AB جدا میکنیم ثابت کنید EF از وسط BC میگذرد .

راهنمایی ـ بفرض AC<AB از نقطهٔ C خط CK را بموازات AB رسم و ثابت کنید که EBKC متوازی‌الاضلاع است .

۴۲ ـ روش ششم ـ بوسیلهٔ عکس قضیهٔ منلاؤس (۱) (Ménélaüs)

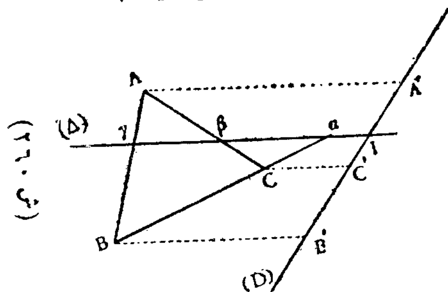
قضیهٔ منلاؤس اینست :

قضیه ـ هرگاه مورب (۲) Δ اضلاع BC و CA و AB از مثلث ABC را بترتیب دونقاط α و β و γ قطع کند رابطهٔ زیر برقرار است :

$$\frac{\overline{\alpha B}}{\overline{\alpha C}} \cdot \frac{\overline{\beta C}}{\overline{\beta A}} \cdot \frac{\overline{\gamma A}}{\overline{\gamma B}} = 1$$

(صورت‌ومخرج هریك ازکسرهای فوق‌اندازهٔ جبری یك پاره‌خطاست

برهان ـ خط دلخواه (D) را طوری رسم میکنیم که با (Δ) موازی نباشد و آنرا در نقطهٔ I قطع کند و ازنقاط A و B و C خطوطی بموازات Δ رسم



(۱) قضیهٔ منلاؤس وعکس آن درکلاس‌ششم ریاضی تدریس‌میشود،

(۲) هرخط که درصفحهٔ مثلث رسم شود و اضلاع آنرا قطع کند مورب نامیده میشود .

میکنیم تا D را در نقاط A' و B' و C' قطع کنند داریم :

$$\frac{\overline{\gamma A}}{\overline{\gamma B}}=\frac{\overline{IA'}}{\overline{IB'}} \quad و \quad \frac{\overline{\beta C}}{\overline{\beta A}}=\frac{\overline{IC'}}{\overline{IA'}} \quad و \quad \frac{\overline{\alpha B}}{\overline{\alpha C}}=\frac{\overline{IB'}}{\overline{IC'}}$$

چون این سه رابطه را عضو بعضو در یکدیگر ضرب کنیم حاصل میشود :

$$\frac{\overline{\alpha B}}{\overline{\alpha C}}\cdot\frac{\overline{\beta C}}{\overline{\beta A}}\cdot\frac{\overline{\gamma A}}{\overline{\gamma B}}=\frac{\overline{IB'}\cdot\overline{IC'}\cdot\overline{\text{۷}I'}}{\overline{IC'}\cdot\overline{IA'}\cdot\overline{IB'}}=\text{۱}$$

و حکم ثابت است .

عکس قضیهٔ منلاؤس - هرگاه روی اضلاع BC و CA و AB از مثلث ABC بترتیب نقاط α و β و γ را طوری اختیار کنیم که رابطهٔ :

$$(\text{۱}) \qquad \frac{\overline{\alpha B}}{\overline{\alpha C}}\cdot\frac{\overline{\beta C}}{\overline{\beta A}}\cdot\frac{\overline{\gamma A}}{\overline{\gamma B}}=\text{۱}$$

برقرار باشد نقاط α و β و γ روی یك خط راست واقع‌خواهند بود.

برهان - دو نقطهٔ α و β را بهم وصل‌کرده فصل مشترك خط $\alpha\beta$ را با خط AB نقطهٔ γ' مینامیم و ثابت میکنیم کـه نقطهٔ γ' بر γ منطبق است (روش سوم شمارهٔ ۳۹) :

چون بنا بفرض α و β و γ' روی‌یك خط راست واقع‌هستند نظر بقضیهٔ منلاؤس داریم :

$$\frac{\overline{\alpha B}}{\overline{\alpha C}} \cdot \frac{\overline{\beta C}}{\overline{\beta A}} \cdot \frac{\overline{\gamma' A}}{\overline{\gamma' B}} = 1$$

از مقایسهٔ این رابطه با رابطهٔ (۱) نتیجه میشود که :

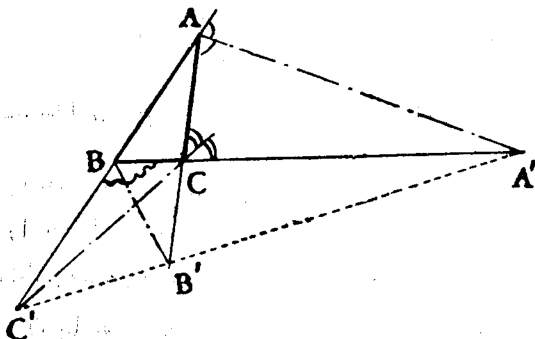
$$\frac{\overline{\gamma A}}{\overline{\gamma B}} = \frac{\overline{\gamma' A}}{\overline{\gamma' B}}$$

یعنی نقاط γ و γ' برهم منطبق هستند و حکم ثابت است.

نتیجه ـ پس هروقت بخواهیم ثابت کنیم که نقاط α و β و γ بر یك استقامت قرار دارند کافیست ثابت کنیم که این نقاط بترتیب روی اضلاع BC و AC و AB ازمثلثی مانند ABC واقع هستند و رابطهٔ (۱) برقرار است .

مثالـ در هرمثلث پاهای سه نیمساز خارجی روی یك خط راست واقع هستند .

حلـ نیمسازهای خارجی زوایای A و B و C را بترتیب



AA' و BB' و CC' مینامیم داریم:

$$\frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} = +\frac{a}{c} \quad \text{و} \quad \frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} = +\frac{c}{b}$$

$$\frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = +\frac{b}{a} \quad \text{و}$$

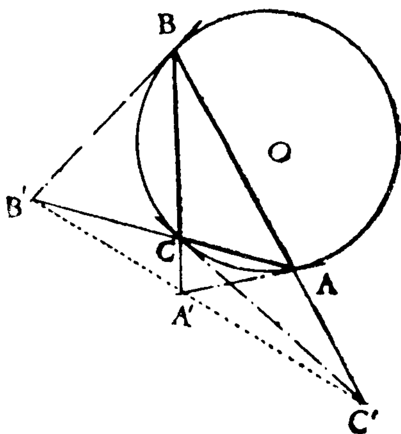
وچون این سه رابطه را درهم ضرب کنیم حاصل میشود :

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \cdot \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = 1$$

تمرینات

۱۹۹- درهرمثلث پاهای دو نیمساز داخلی وپای‌نیمساز خارجی زاویهٔ سوم بر یك استقامت هستند .

۲۰۰- مماسهایی‌که در سه‌رأس هرمثلث بر دایره‌محیطی



(ش ۲۶۲)

آن رسم شوند اضلاع مقابل را در سه نقطه قطع میکنند که بر یك استقامت قرار دارند .

راهنمایی– از تشابه مثلث های ABA' و CAA' و امثال آنها رابطهٔ $\frac{A'B}{A'C}=\frac{\overline{AB}^2}{\overline{CA}^2}$ و نظایر آن را نتیجه بگیرید و روابط حاصل را درهم ضرب کنید .

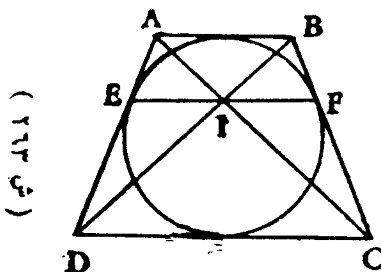


فصل ششم

چگونه ثابت کنیم که سه خط متقاربند ؟

۴۳- باوجود اختلاف ظاهری که ما بین این مسئله ومسئله‌یی که درفصل قبل راجع بآن بحث نمودیم : (چگونه ثابت کنیم که سه نقطه بر یك استقامت هستند ؟) وجود دارد تقریباً این دومسئله مانند هم حل میشوند و دربیشترموارد ازبیان یك موضوع بدو صورت مختلف این دومسئله بوجود میآیند . مثال زیر این‌موضوع را روشن میسازد:

مثال- ذوزنقهٔ متساوی‌الساقینی بریك دایره محیط است ثابت کنید که نقطهٔ نقاطع قطرها و نقاط تماس دو ساق بادایره‌روی یك خط واقع هستند (۲۸۹:ح۱)



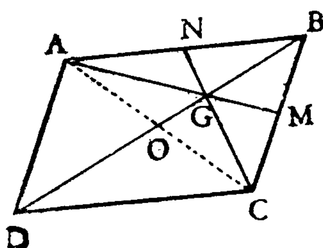
(ش ۲۱۳)

همین مسئله را بصورت زیر میتوان بیان نمود:

ذوزنقهٔ متساوی‌الساقینی بریك‌دایره‌محیط است . ثابت کنیدکه خط واصل مابین نقاط تماس دو ساق با دایره با دوقطر ذوزنقه سه خط متقارب هستند .

۴۴ - روش اول- ثابت میکنیم که دو نقطه که روی یکی ازسه خط اختیار شود با فصل مشترك دوخط دیگر سه نقطهٔ واقع بر یك استقامت میباشند.

مثال- متوازی‌الاضلاع ABCD را درنظر گرفته رأس A را بنقطهٔ M وسط BC. و رأس C را بنقطهٔ N وسط AB وصل میکنیم . ثابت کنید خطوط AM و CN و BD متقاربند .



(ش ۲٦٤)

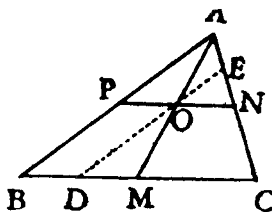
فرض:
$AB \parallel DC$
$AD \parallel BC$
$NA = NB$
$MC = MB$

حکم:
AM و CN
وBD متقاربند

حل- فصل مشترك AM و CN را G مینامیم و ثابت می‌کنیم که نقطهٔ G با B و D بر یك استقامت است . برای این کار قطر AC را وصل میکنیم نقطهٔ G محل تلاقی دومیانهٔ AM و CN ازمثلث ABC است و اگر وسط AC را O بنامیم میانهٔ سوم این مثلث یعنی BO نیز از G میگذرد پس نقاط B و G و D بر یك استقامت هستند (قطر BD) وحکم ثابت است .

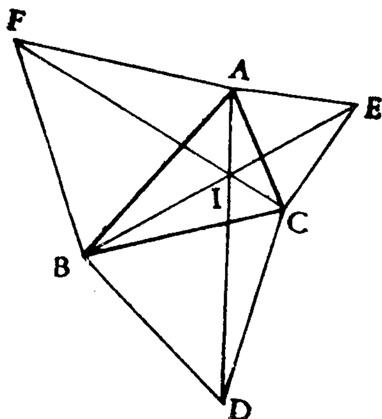
تمرینات

۲۰۱- اوساط اضلاع BC وAC و AB ازمثلث ABC را بترتیب M و N و P مینامیم اگرD وسط BM و E وسط AN باشد ثابت کنید که خطوط AM و NP و DE متقاربند.



(ش ۲۶۵)

راهنمایی- فصل‌مشترك AM و PN را O نامیده ثابت کنید E و O و D بر یك استقامت هستند.



(ش ۲۶۶)

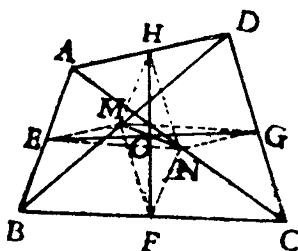
۲۰۲ - روی اضلاع‌مثلث ABC و در خارج این مثلث سه مثلث متساوی الاضلاع می سازیم و رأس هریك از این مثلث ها را برأس مقابل ازمثلثABCوصل میکنیم ثابت کنید سه خط حاصل متقاربند.

راهنمایی - فصل مشترك FC و BE را I نامیده ثابت کنید نقاط A و I و D بریك استقامت هستند.

۴۵- روش دوم - ثابت میکنیم که فصل مشترك یکی از آنها با هریك از دوخط دیگر دو نقطه اندکه برهم منطبق میباشند.

مثال- ثابت کنیدکه در هرچهارضلعی خطوطی که اوساط اضلاع مقابل را بهم وصل‌میکنند با خطی که اوساط دوقطر را بهم‌وصل‌میکند‌متقارب‌هستند(۷۱: ح۱)

حل- در مثلث ABD پاره خط EM که اوساط دو ضلع را بهم وصل میکند با ضلع سوم یعنی AD موازی است و مساوی نصف‌آن میباشد و بهمین دلیل درمثلث CAD پاره‌خط NG با AD موازیست و مساوی نصف آن‌میباشدپس‌چهارضلعی EMGN که دوضلع روبروی‌آن‌هم مساوی و هم موازی میباشند متوازی‌الاضلاع است و بنابراین EG از نقطهٔ O وسط قطر MN میگذرد بهمین طریق ثابت میشودکه FMHN متوازی‌الاضلاع است و FH نیز ازنقطهٔ O وسط MN میگذرد پس خطوط EG و FH و MN متقاربند.



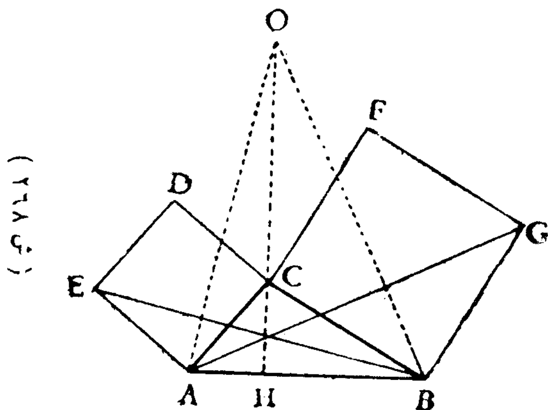
(ش ۲٦۷)

تمرینات

۲۰۳- ثابت‌کنید هر خط که اوساط دوضلع روبروی یك‌متوازی‌الاضلاع را بهم متصل سازد از محل تلاقی دوقطر آن می‌گذرد (۴۹ : ج ۱)

۲۰۴- روی دوضلع AC وBC ازمثلث غیرمشخص ABC دومربع ACDE و BCFG را میسازیم. ثابت کنید که

خطوط AM و BN که بترتیب از A بر BE و از B بر AG عمود فرود آیند یکدیگررا روی ارتفاع نظیر رأس C قطع می‌کنند .

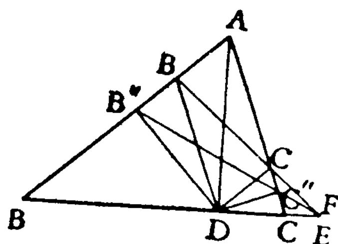


(ش ۲۶۸)

راهنمایی ـ فصل مشترك AM و HC را O بنامید و ثابت‌کنید $CO=AB$ سپس فصل مشترك BN و HC را O' بنامید و ثابت‌کنید $CO'=AB$.

۲۰۵ـ در مثلث ABC ازنقطهٔ D پای ارتفاع AD دو خط DC' و DB' را بترتیب بموازات اضلاع AB و AC و دو خط DB'' و DC'' را بترتیب عمود براین اضلاع رسم می‌کنیم . ثابت‌کنید که سه خط BC و $B'C'$ و $B''C''$ ازیك نقطه میگذرند

(۲ ح : ۶۵۵)



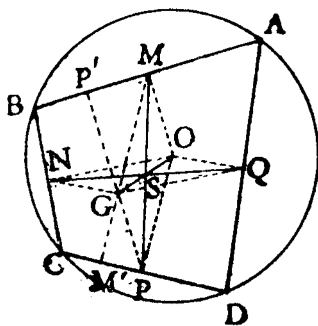
(ش۲۶۹)

راهنمایی ـ فصل مشترك خط $B''C''$ را باخط BC نقطهٔ E و فصل مشترك خط $C'B'$ را با BC نقطهٔ F بنامید و با استفاده از قوت نقطه نسبت بدایره ثابت کنید E و F برهم منطبق هستند .

۴۶ ـ روش سوم ـ ثابت میکنیم که فصل مشترك دوتا از آنها روی سومی واقع است یا بعبارت دیگر یکی از سه خط ازفصل مشترك دو خط دیگر میگذرد این روش با جزئی تفاوتی همان‌روش دوم است .

مثال ـ در چهارضلعی محاطی ABCD از نقاط M و N و P و Q اوساط اضلاع AB و BC و CD و DA عمود های MM' و NN' و PP' و QQ' را براضلاع مقابل فرود میآوریم ثابت کنید این‌عمودها متقاربند (۴۶۰ : ح۱)

حل ـ فصل مشترك عمود ـ های MM' و PP' را G مـی‌ـ نامیم‌چهارضلعی‌OMGPمتوازی‌ـ الاضلاع است (زیرا OM برAB و OP بـر CD عمود است) و اقطار آن یعنی OG و MP یکدیگررا در نقطهٔ S نصف می‌ـ کنند بعبارت دیگر OG از وسطPMمیگذرد و چونNQنیز از وسط PM می گذرد (زیرا MQPN متوازی الاضلاع است)

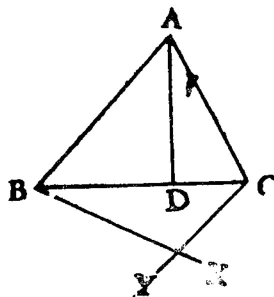


(ش ۲۷۰)

پس NQ از وسط OG میگذرد و بنابراین OQGN متوازی‌الاضلاع است یعنی NG بر AD عمود است و نقطهٔ N محل تقاطع چهار عمود میباشد .

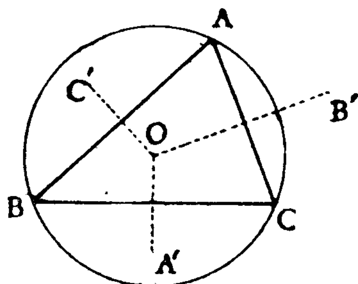
تمرینات

۲۰۶- ارتفاع AD ازمثلث ABC را رسم‌کرده درخارج مثلث نیم خط Bx را طوری رسم میکنیم که $\hat{CBx} = \hat{CAD}$ باشد و نیم خط Cy را طوری میکشیم که $\hat{BCy} = \hat{BAD}$ باشد ثابت‌کنیدکه خطوط AD و Cy و Bx متقاربند .



(ش ۲۷۱)

۲۰۷- مثلث ABC را درنظرگرفته مرکزدایرهٔ محیطی آنرا O وقرینه‌های نقطهٔ O را نسبت باضلاع BC وAC و AB بترتیب 'A و'B و'C مینامیم. ثابت‌کنید پاره‌خط های 'AA و 'BB و 'CC درنقطه‌یی که دروسط هریك از آنها واقع است متقاربند .



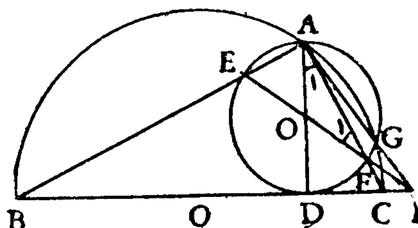
(ش ۲۷۲)

راهنمایی - 'BC B'C متوازی‌الاضلاع است .

۲۷- روش چهارم - ثابت میکنیم که سه خط مورد بحث خطوطی هستند که میدانیم از یك نقطه میگذرند .

مثلا سه ارتفاع یا سه میانه یا سه نیمساز داخلی زوایای یك مثلث یا محورهای اصلی سه دایره که مراکزشان بر یك استقامت نباشند و غیره .

مثال - از نقطهٔ A واقع بر نیمدایرهٔ بقطر BC و بمرکز O عمود AD را بر BC فرود آورده دایرهٔ بقطر AD را رسم میکنیم ومرکز آنرا O' مینامیم دایرهٔ O' خط AB را درنقطهٔ E وخط AC را درنقطهٔ F ونیمدایرهٔ بمرکز O را درA وG قطع میکنند ثابت کنید خطوط BC وEF وAG متقاربند (۶۴۷: ح ۲)



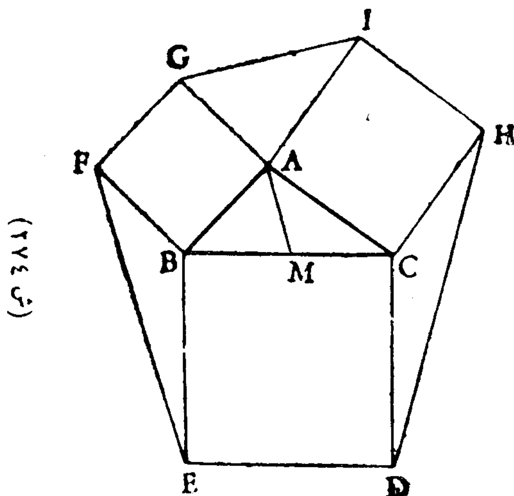
(ش ۲۷۳)

حل- چون داریم $\hat{B} = \hat{A}_1 = \hat{F}_1$ بنابراین زاویهٔ B با زاویهٔ EFC مکمل است وچهار ضلعی BEFC محاطی است پس سه خط BC و EF و AG عبارتند ازمحورهای اصلی سه دایرهٔ (O) و (BEFC) و (O') دوبدو . بنابراین سه‌خط مزبور ازیك نقطه که همان مرکز اصلی سه دایره است میگذرند .

تمرینات

۲۰۸ـ سه مثلث متساوی‌الساقین که قاعده های آنها اضلاع مثلث ABC باشد رسم میکنیم ثابت کنید عمودهایی که از رأسهای این مثلث های متساوی‌الساقین برقاعدهٔ آنها فرود آید متقاربند .

۲۰۹ـ روی اضلاع‌مثلث ABC ودرخارج‌آن مربعهای BCDE و ACHI و ABFG را ساخته خطوط GI و EF و DH را رسم میکنیم . اولا ثابت کنید GI مساوی دو برابر میانهٔ AM ازمثلث ABC است . ثانیاً ثابت‌کنید عمودهایی‌که A وB وC بترتیب برخطوط GI و EF و DH فرودآیند متقاربند .

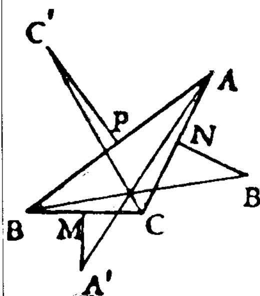


(شکل ۲۲۴)

راهنمایی- این‌خطوط میانه‌های مثلث ABC میباشند .

۲۱۰ـ مثلث ABC را درنظر گرفته اوساط اضلاع

BC و CA و AB را بترتیب M و N و P مینامیم و در خارج مثلث پاره خطهای MA' و NB' و PC' را بترتیب عمود بر BC و CA و AB و مساوی نصف آنها رسم میکنیم. اولاً ثابت کنید مثلث $B'M'C'$ متساوی‌ـ الساقین و قائم الـزاویـه است (مثلث‌های $MA'B'$ و MCC' را باهم مقایسه کنید). ثانیاً ثابت کنید $A'B'$ و CC' برهم عمود وباهم مساویند. ثالثاً ثابت کنید که خطوط AA' و BB' و CC' از یك نقطه میگذرند.



(ش ۲۷۵)

راهنمایی- اینخطوط ارتفاعات مثلث $A'B'C'$ میباشند.

۲۱۱— مثلث ABC را درنظرگرفته ارتفاعات AA' و BB' و CC' آنرا رسم میکنیم. ثابت کنید عمودهایی که از A بر $B'C'$ و از B بر $A'C'$ و از C بر $A'B'$ فرود آیند ازیك نقطه میگذرند.

راهنمایی ــ هریك ازاینعمودها ازمرکز دایرهٔ محیطی مثلث میگذرد. ازمسئلهٔ شمارهٔ (۱۷۲ : ح ۱) استفاده کنید.

۲۱۲— ثابت کنید عمودهایی که از مراکز دایره هـای محاطیخارجی مثلث ABC بر اضلاع مثلث فرود آیند ازیك نقطه میگذرند.

راهنمایی ــ ازتمرین شمارهٔ ۲۱۰ استفاده کنید.

۲۱۳— روی دو ضلع AC و BC ازمثلث غیرمشخص ABC دو مربع ACDE و BCFG را میسازیم ثابت کنید خطوط AG و BE یکدیگررا روی ارتفاع CH قطعمیکنند. بشکل ۲۶۸ رجوع کنید.

راهنمایی– ازتمرین شمارهٔ ۲۰۵ استفاده کرده ثابت کنید AG و BE و CH ارتفاعات مثلث ACB میباشند .

۴۸– روش پنجم – از قضیهٔ زیر استفاده می‌کنیم :

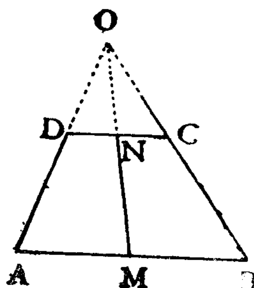
قضیه – دوخط متوازی L و 'L را درنظر گرفته فرض میکنیم : نقاط متوالی A و B و C و D و.......... روی L و نقاط متوالی 'A و 'B و 'C و 'D و .... روی 'L واقع باشند اگرداشته‌باشیم

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{CD}{C'D'}=\cdots\cdots$$

خطوط 'AA و 'BB و 'CC و 'DD و.......... متقاربند .

رجوع شود بهندسهٔ سال سوم دبیرستان)

مثال – ثابت کنید در هر ذوزنقه خطی که اوساط دو قاعده را بهم وصل میکند با دوساق ذوزنقه ازیك نقطه میگذرد .



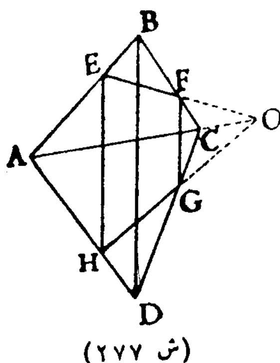
(ش ۲۷۶)

حل – وسط قاعدهٔ AB را M و وسط قاعدهٔ DC را N مینامیم باید ثابت کنیم خطوط AD و BC و MN متقاربند .

اما چون M و N اوساط AB و DC هستند داریم $\frac{MN}{NC}=\frac{AM}{MB}$

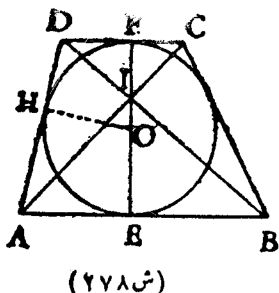
و بنا بقضیهٔ قبل خطوط AD و MN و BC متقاربند .

تمرينات



(ش ۲۷۷)

۲۱۴- چهار ضلعی ABCD را درنظر گرفته دو خط بموازات قطر BD طوری رسم میکنیم که اولی AB را در E و AD را در H و دومی AC را در F و CD را در G قطع کند ثابت کنید خطوط EF و HG و قطر AC متقاربند .



(ش ۲۷۸)

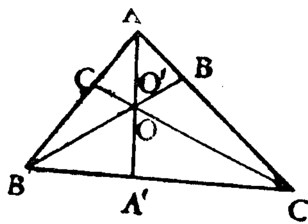
۲۱۵ - ثابت کنید اقطار هر ذوزنقهٔ محیط بریك دایره و قطری از دایره که بنقاط تماس دو قاعده منتهی میشود ازیك نقطهمیگذرند(۳۸۴:ح۱)

راهنمایی - $HA \cdot HD = \overline{OH}^2$

روش ششم- بوسیلهٔ قضیهٔ سوا (Céva) .

قضیه - شرط لازم وکافی برای آنکه سه خط که از رأسهای A و B و C یك مثلث میگذرند متقارب باشند آنست که این خطوط اضلاع BC و CA و AB را بترتیب در نقاط A′ و B′ و C′ قطع کنند و داشته باشیم :

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{C'B}}{\overline{B'A}} \cdot \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = -1 \qquad (۱)$$



(ش۲۷۹)

برهان - فصل مشترك AA' و BB' را O مینامیم . نسبت $\frac{\overline{OA}}{\overline{O'A}}$ از روی رابطهٔ منلاؤس که دربارهٔ مثلث $AA'C$ ومورب BOB' نوشته شود بدست میآید:

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{OA'}} \cdot \frac{\overline{BA'}}{\overline{BC}} \cdot \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} = 1 \qquad (۲)$$

و فصل مشترك AA' و CC' را O' مینامیم نسبت $\frac{\overline{O'A}}{\overline{O'A'}}$ از روی رابطهٔ منلاؤس که دربارهٔ مثلث ABA' و مورب CC' نوشته میشود بدست میآید :

$$\frac{\overline{O'A}}{\overline{A'O'}} \cdot \frac{\overline{CA'}}{\overline{CB'}} \cdot \frac{\overline{C'B}}{\overline{C'A}} = 1 \qquad (۳)$$

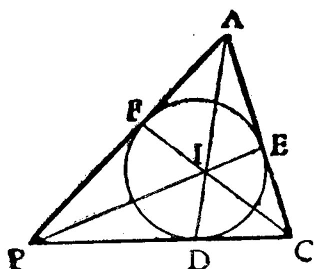
برای آنکه AA' و BB' و CC' متقارب باشند لازم و کافیست که دو نسبت $\frac{\overline{OA}}{\overline{OA'}}$ و $\frac{\overline{O'A}}{\overline{O'A'}}$ متساوی باشند .

چون مقادیر این دو نسبت را از روی روابط (۲) و (۴) بدست آورده متساوی قرار دهیم خواهیم داشت :

$$\frac{\overline{B'A}}{\overline{B'C}} \times \frac{\overline{BC}}{\overline{BA'}} = \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} \times \frac{\overline{CB}}{\overline{CA'}}$$

وکافیست ملاحظه کنیم که $\overline{BC}=-\overline{CB}$ و $\overline{BA'}=-\overline{A'B}$
و $\overline{CA'}=-\overline{A'C}$ تا رابطهٔ اخیر بصورت (۱) درآید .

> **مثال-** ثابت کنید خطوطی که رؤس یك مثلث را بنقاط تماس اضلاع مقابل با دایرهٔ محاطی وصل میکنند متقارب هستند .



(ش ۲۸۰)

حل- میدانیم که (۱۳۳: ح ۱)

$AE=AF=p-a$

$BF=BD=p-b$

$CE=CD=p-c$

(a و b و c بترتیب طول اضلاع BC و CA و AB وطول p نصف محیط مثلث است .)

پس میتوان نوشت :

$$\frac{\overline{FA}}{\overline{FB}}=-\frac{p-a}{p-b}\text{ و }\frac{\overline{EC}}{\overline{EA}}=-\frac{p-c}{p-a}\text{ و }\frac{\overline{DB}}{\overline{DC}}=-\frac{p-b}{p-c}$$

چون این سه رابطه را درهم ضرب کنیم حاصل میشود :

$$\frac{\overline{FA}}{\overline{FB}}\cdot\frac{\overline{DB}}{\overline{DC}}\cdot\frac{\overline{EC}}{\overline{EA}}=-1$$

و نظر بقضیهٔ **سوا** خطوط AD و BE و CF متقارب هستند .

تمرینات

۲۱۶- اگر A' و B' و C' بترتیب سه نقطه واقع بر اضلاع BC و CA و AB ازمثلث ABC بوده A'' و B'' و C'' مزدوجهای توافقی این نقاط نسبت بدو انتهای ضلع نظیر خود باشند ، ثابت کنید که خطوط AA'' و BB'' و CC'' متقارب هستند .

۲۱۷- تمرین شمارهٔ ۲۱۴ را با این روش حل کنید :

۲۱۸- خطوطی که نقاط تماس یکی ازدوایر محاطی خارجی مثلث را با اضلاع آن برؤس مقابل وصل میکنند متقارب هستند

۲۱۹- با این روش ثابت کنید که اولا سه میانهٔ هر مثلث ثانیاً سه ارتفاع هرمثلث و ثالثاً سه نیمساز داخلی هر مثلث متقاربند .

فصل هفتم

چگونه ثابت کنیم که چهار نقطه روی یکدایره اند ؟

۵۰- این مسئله بسه صورت زیر بیان میشود :

الف) چهار نقطهٔ A و B و C و D روی یکدایره‌اند .

ب) چهارضلعی ABCD محاطی است

ج) دایرهٔ ABC (که بوسیلهٔ نقاط A وB وC مشخص‌میشود) ازنقطهٔ معلوم D میگذرد .

یك روش‌خیلی‌ساده برای حل‌مسئله اینست که ثابت کنیم نقاط مورد بحث ازیك نقطه بیك فاصله اند ولی چون همین روش درمسائل بصورتهای دیگری بکار میرود از ذکرآن آن صرفنظر میکنیم .

۵۱ - روش اول - از خاصیت های چهارضلعـی محاطـی استفاده میکنیم :

این خاصیت ها را درشمارهٔ ۲۰ صفحهٔ ۶۷ شرح داده‌ایم .

بطور خلاصه برای آنکه ثابت کنیم یك چهارضلعی محاطی است کافیست ثابت‌کنیم‌که :

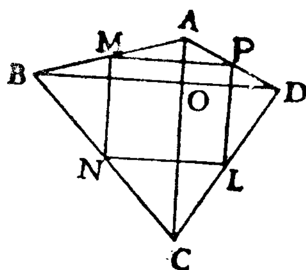
دو زاویهٔ روبروی آن مکمل یکدیگرند

یا : یك زاویهٔ آن مساویست با زاویهٔ خارجـی روبروی خود

یا : زاویهٔ یك ضلع با یك قطر مساویست بازاویهٔ ضلع‌مقابل‌آن با قطر دیگر (بشکل ۱۱۵ صفحه ۶۷ مراجعه کنید)

تبصره - میدانیم که مستطیل و ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین قابل محاط شدن در دایره هستند پس اگر ثابت کنیم که یك چهارضلعی مستطیل یا ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین است ثابت کرده‌ایم که چهار رأس آن روی یك دایره واقع هستند .

مثال ۱ - اگر اقطار یك چهارضلعی برهم عمود باشند اوساط اضلاع آن چهارضلعی روی یك دایره واقع هستند .



(ش۲۸۱)

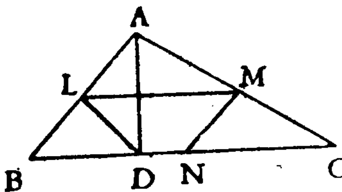
فرض:
$$\begin{cases} AC \perp BD \\ MA = MB \\ NB = NC \\ LC = LD \\ PD = PA \end{cases}$$

حکم : NMLP محاطی است .

حل- چهارضلعی NMLP متوازی‌الاضلاع است زیرا MN و PL هریك با AC موازی و مساوی نصف آن میباشند بعلاوه این متوازی‌الاضلاع مستطیل است زیرا مثلا اضلاع MN و NL از آن که بترتیب با اقطار AC و BD از چهارضلعی موازیند برهم عمود میباشند پس چهارنقطهٔ M و N و L و P روی یك دایره هستند .

مثال ۲- در هرمثلث پاهای سه ارتفاع و اوساط اضلاع شش نقطه واقع روی یك دایره هستند
(رجوع کنید بمسئلهٔ ۷۲ : ح ۱)

کافیست ثابت کنیم که اوساط اضلاع و پای یك ارتفاع روی یك دایره هستند.



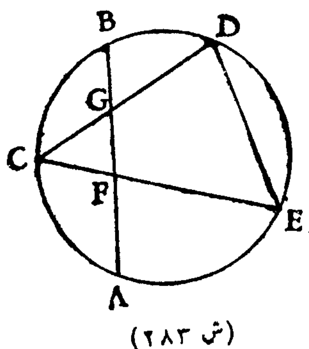
(ش۲۸۲)

فرض $\left.\begin{array}{r} AD \perp BC \\ LA=LB \\ NB=NC \\ MC=MA \end{array}\right\}$

حکم : D و M و N و L روی یك دایره اند.

حل - چهارضلعی LMED ذوزنقه است زیرا پاره خط LM که اوساط دوضلع مثلث ABC را بهم وصل میکند باضلع سوم یعنی BC موازی است . بعلاوه این ذوزنقه متساوی الساقین است زیرا پاره خط MN که اوساط دوضلع مثلث ABC را بهم وصل کرده است مساوی با نصف ضلع سوم است یعنی $MN=\frac{AB}{۲}$ و از طرف دیگر درمثلث قائم‌الزاویهٔ ABD میانهٔ LD نصف وتر است یعنی $DL=\frac{AB}{۲}$ بنابراین ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین LMND محاطی است و حکم ثابت است .

مثال ۳- ازنقطهٔ C وسط کمان AB متعلق بیك دایره دوخط دلخواه رسم میکنیم تا دایره را درنقاط D و E ووتر AB را درنقاط F و G قطع کنند ثابت کنید چهارنقطهٔ D و E و G و F روی یك دایره اند
(۱۷۰ : ح ۱)



(ش ۲۸۳)

حل ۱ـ کافیست ثابت کنیم که مثلا دوزاویهٔ متقابل D و F از چهار ضلعی مزبــور مکمل یکدیگرند :

$$\text{اندازهٔ } \hat{D} = \frac{\overset{\frown}{CA} + \overset{\frown}{AE}}{۲}$$

و

$$\text{اندازهٔ } \hat{F} = \frac{\overset{\frown}{CA} + \overset{\frown}{BE}}{۲}$$

پس

$$\text{اندازهٔ } (\hat{F} + \hat{D}) = \frac{۲\overset{\frown}{CA} + \overset{\frown}{AE} = \overset{\frown}{ED}}{۲}$$

و چون بجای $۲\overset{\frown}{CA}$ مقدار $\overset{\frown}{AB}$ را قرار دهیم معلوم میشود که

$$\hat{F} + \hat{D} = \frac{۳۶۰^\circ}{۲} = ۱۸۰^\circ$$

و حکم ثابت است .

حلــ کافیست ثابت کنیم زاویهٔ D از چهارضلعی با زاویهٔ خارجی روبروی خود یعنی زاویهٔ EFA مساویست :

$$\text{اندازهٔ } \hat{D} = \frac{\overset{\frown}{CA} + \overset{\frown}{AE}}{۲}$$

$$\text{اندازهٔ } \hat{EFA} = \frac{\overset{\frown}{CB} + \overset{\frown}{AE}}{۲} = \frac{\overset{\frown}{CA} + \overset{\frown}{AE}}{۲}$$

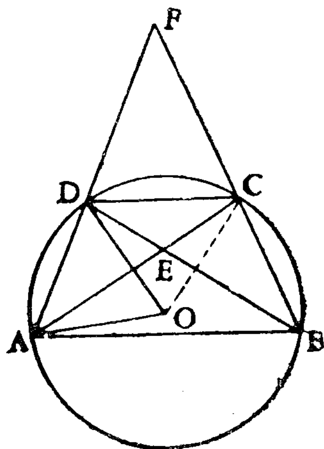
یعنی $\hat{D} = E\hat{F}A$

و حکم ثابت است .

تمرینات

۲۲۰- در مثلث ABC نقطهٔ I محل تلاقی سه نیمساز داخلی ونقطهٔ 'I محل تلاقی دونیمساز زوایای خارجی B و C میباشد. ثابت کنیدچهارضلعی 'BICI محاطی است (۱۶۹: ح ۱)

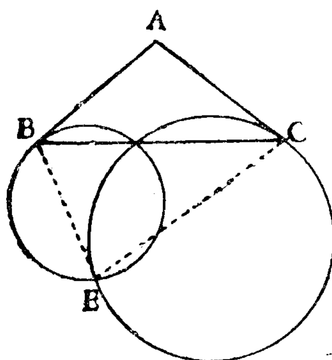
۲۲۱- ذوزنقهٔ ABCD دردایره‌یی بمرکز O محاط است و اقطار آن AC و BD درنقطهٔ E وامتداددوساق آن AD و BC درنقطهٔ F متقاطعند. ثابت کنید اولا چهارنقطهٔ A و D و O و E روی یك دایره و ثانیاً چهارِنقطهٔ A و C و O و F روی یك دایره اند .



(ش ۲۸٤)

راهنمایی- زاویهٔ AOC مکمل زاویهٔ F است .

۲۲۲- مثلث ABC و نقطهٔ D روی ضلع BC از آن مفروض است دایره‌یی رسم میکنیم که از D گذشته درنقطهٔ B با AB مماس باشد و دایرهٔ دیگری رسم میکنیم که از D

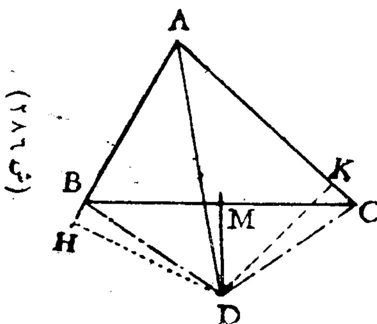


(ش ۲۸۵)

گذشته و در نقطهٔ C با AC مماس باشد. این دو دایره یکدیگر را در نقطهٔ دیگری مانند E قطع می کنند. ثابت کنید که چهار نقطهٔ A و B و C و E روی یکدایره اند

راهنمایی ـ زاویهٔ BEC مکمل زاویهٔ A است.

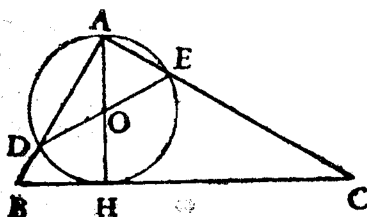
۲۲۳- درمثلث ABC عمود منصف ضلع BC و نیمساز زاویهٔ A را رسم میکنیم تا یکدیگر را درنقطه‌یی مانند D قطع کنند اولا ثابت کنید اگر AB با AC مساوی نباشد نقطهٔ D در خارج مثلث واقع است . ثانیاً ثابت کنید که چهار نقطهٔ A و B و C و D روی یکدایره واقع هستند .



(ش ۲۸۶)

راهنمایی ـ عمودهای DH و DK را بر AB و AC فرود آورده ثابت کنید زاویهٔ HBD با ACD مساویست (فرض کرده‌ایم AB < AC)

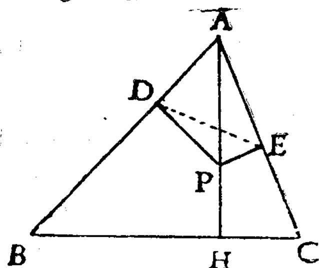
۲۲۴- درمثلث قائم‌الزاویهٔ ABC $(\hat{A}=۹۰^\circ)$ ارتفاع



(ش ۲۸۷)

AH را رسم می‌کنیم و دایره‌ی بقطر AH میکشیم این دایره اضلاع AB وAC را در نقاط D و E قطع میکنند. ثابت کنید چهارضلعی BCDE محاطی است.

۲۲۵- روی ارتفاع AH از مثلث غیرمشخص ABC نقطه‌یی مانند P اختیار کرده تصاویر آنرا روی AB و AC بترتیب D و E می‌نامیم. ثابت کنید چهار نقطهٔ D وE وB وC روی یك دایره اند آیا اگر نقطهٔ P در امتداد AH واقع باشد مسئله صحیح است یا نه ؟



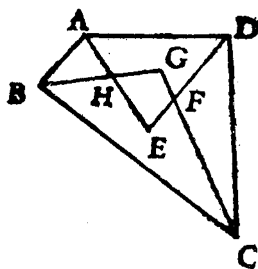
(ش ۲۸۸)

راهنمایی - ثابت کنید $\hat{ADE}=\hat{C}$

۲۲۶- ثابت کنید که قرینه های محل تلاقی ارتفاعات هر مثلث نسبت بهریك از سه‌ضلع آن روی دایرهٔ محیطی مثلث واقع هستند .

۲۲۷- ازتقاطع نیمسازهای داخلی یك چهارضلعی محدب غیر مشخص یك چهار ضلعی محاطی تشکیل میشود .

راهنمایی ـ مجموع زوایای دو مثلث BGC و AED را بنویسید و مجموع زوایای چهار ضلعی را ازآن کم کنید .



(ش ۲۸۹)

۲۲۸- چهارضلعی محدب غیرمشخصی درنظر گرفته دایره‌هایی در داخل آن رسم میکنیم که هریك با سه‌ضلع آن مماس باشند. ثابت کنیدکه مراکز این دوایر چهارنقطهٔ واقع بریك دایره هستند .

راهنمایی ـ ازمسئلهٔ قبل استفاده کنید .

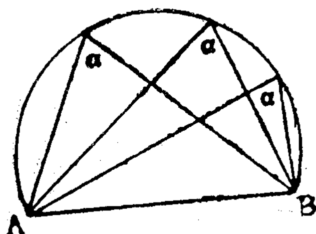
۲۲۹- دایرهٔ نه نقطه ـ ثابت کنید که در هر مثلث اوساط اضلاع و پاهای ارتفاعات و اوساط پاره خط هایی که رؤس را بنقطهٔ تلاقی ارتفاعات وصل میکنند نه نقطهٔ واقع روی یك دایرهٔ هستند .

(۲ شمارهٔ ۵۰ ـ در شمارهٔ ۸۸ : ح ۱) این مسئله را فقط با استفاده ازکتاب اول حل کرده ایم) .

۵۲ـ روش دوم ـ با استفاده ازمکانهای هندسی : ثابت میکنیم که نقاط مورد بحث متعلق بیك مکان هندسی هستند و این‌مکان هندسی یك دایره یا قسمتی ازآنست .

برای استفاده از این‌روش باید بخاطر داشت که :

الف ـ مکان هندسی نقاطی از صفحه واقع دریکطرف یك خط

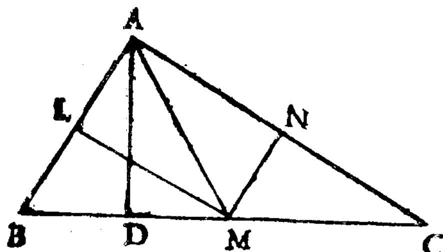


(ش ۹۰

راست که از آن نقاط قطعه یی مانند AB ازاین خط راست بزاویهٔ معلوم α دیده شود کمانی است ازدایرهٔ O که درانتهایش A و B میباشند (کمان درخور زاویهٔ α نظیر پاره خط AB)

ب ـ مکان هندسی نقاطی از صفحه که ازآنها پاره‌خط AB بزاویهٔ قائمه دیده شود دایره‌یی است بقطر AB

مثال ـ ثابت کنید که در هرمثلث قائم‌الـزاویهٔ ABC $(\hat{A}=۹۰^\circ)$ رأس زاویهٔ قائمه و نقطهٔ D پای ارتفاع AD و اوساط سه ضلعِ مثلث پنج نقطه واقع روی یك دایره هستند (۱۶۸ : ج ۱)



(ش ۲۹۱)

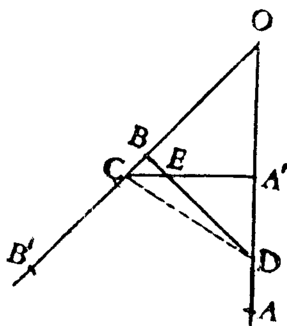
فرض:
$\widehat{BAC}=۹۰^\circ$
$AD \perp BC$
$LA=LB$
$MB=MC$
$NC=NA$

حکم: A و D و M و N و L روی یك دایره‌اند.

حل ـ خطوط MN و ML کـه بترتیب بـا AB و AC موازیند بر AC و AB عمودند و هریك از سه زاویهٔ ANM و ALM و ADM قائمه هستند و لذا پاره خط AM ازهریك ازنقاط N و L و D بزاویهٔ قائمه دیده میشود و دایرهٔ بقطر AM از این نقاط میگذرد وحکم ثابت است .

تمرینات

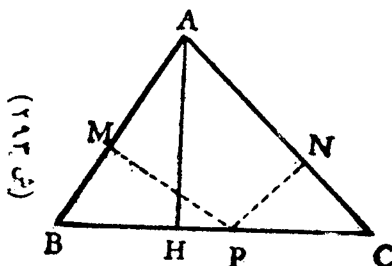
۲۳۰- بر اضلاع زاویهٔ O دوطول اختیاری OA و OB را جدا میکنیم و از A' وسط OA عمودی برOA اخراج میکنیم تا ضلع OB را در نقطهٔ C قطع کند و از B' وسط OB عمودی بر OB اخراج مینماییم تاضلع OA را درنقطهٔ D قطع کند. خطوط A'C وB'D یکدیگررا درنقطهٔ E قطع میکنند ثابت کنید نقاط A وB وC و D وE روی یك دایره هستند .



(ش ۲۹۲)

راهنمایی ـ کمـــان درخور زاویهٔ O نظیر پاره خط CD را درنظر بگیرید .

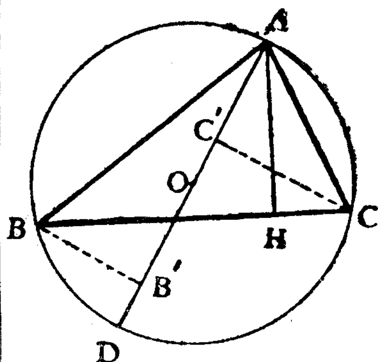
۲۳۱- مثلثABC ونقطهٔ دلخواه P را روی ضلع BC از آن‌درنظرگرفته تصاویر Pرا روی ABوAC بترتیب M و N و پای ارتفاع نظیر رأس



(ش ۲۹۳)

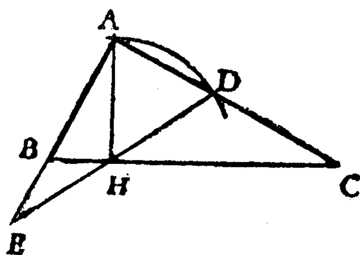
A را H مینامیم . ثابت کنید نقاط A و M و H و P و N روی یك دایره واقع هستند .

۲۳۲- مثلث ABC و دایرهٔ محیطی آنرا درنظر گرفته مرکز دایرهٔ محیطی را O و پای ارتفاع وارد از A را H مینامیم و تصاویر نقاط B و C را روی خط AO بترتیب نقاط B′ و C′ میخوانیم ثابت کنید چهار نقطهٔ A و H و B′ و B روی یك دایره و چهار نقطهٔ A و H و C و C′ روی یك دایره واقع هستند .



(ش ۲۹٤)

۲۳۳- مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC $(\hat{A}=90°)$ رادرنظر گرفته ارتفاع AH آنرا رسم می‌کنیم وبمرکز H و شعاع HA دایره‌یی رسم می‌کنیم تا ضلع AC را در نقطهٔ دیگری مانند D قطع کند خط DH خط AB را در نقطهٔ E قطع میکند. ثابت کنید نقاط D و C و B و E روی یك‌دایره‌هستند .



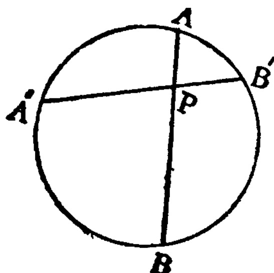
(ش ۲۹۵)

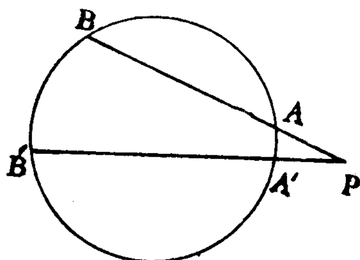
راهنمایی ـ کمان درخور زاویهٔ C نظیر پاره‌خط BD را درنظر بگیرید .

۵۳ـ روش سوم ـ با استفاده از قوت نقطه نسبت بدایره از قضیهٔ زیر استفاده میکنیم (کتاب سوم هندسه)

I ـ **قضیه ـ** هرگاه از نقطهٔ P دو قاطع رسم کنیم که اولی دایرهٔ مفروضی را درنقاط A و B و دومی همان دایره را درنقاط A' و B' قطع کند داریم $PA \cdot PB = PA' \cdot PB'$

II ـ **قضیهٔ عکس ـ** دوخط راست را که در نقطهٔ P متقاطع هستند درنظر گرفته فرض می‌کنیم دو نقطهٔ A و B روی اولی و دونقطهٔ A' و B' روی دومی طوری واقع باشند که نقطهٔ P و خارج از هر دو پاره خط AB و A'B' و یا داخل هردو آنها قرار داشته باشند و رابطهٔ $PA \cdot PB = PA' \cdot PB'$ بر قرار باشد . دراینصورت چهارنقطهٔ A وB و A' و B' روی یك دایره واقع خواهند بود





(ش ۲۹۶ و ۲۹۷)

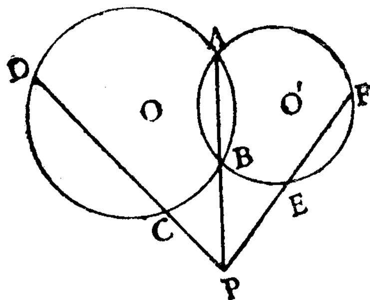
اگرمقادیرجبری حاماها را درنظر بگیریم قضیهٔ II بعبارت ساده تری بیان میشود :

قضیه — اگر دوخط AB و A'B' درنقطهٔ P متقاطع باشند و داشته باشیم :

$$\overline{PA}\cdot\overline{PB}=\overline{PA'}\cdot\overline{PB'}$$

چهار نقطهٔ A وB و A' وB' روی یك دایره واقع هستند.

مثال- دو دایرهٔ O و O' درنقاط A و B متقاطع هستند ازنقطهٔ P واقع بر خط AB دو خط قاطع رسم میکنیم که اولی دایرهٔ Oرا در نقاط C و D و دومی دایرهٔ O' را درنقاط E و F قطع کند ثابت کنید نقاط C و D و E و F روی یك دایره اند .



(ش۲۹۸)

حل- چون ازنقطهٔ P دو قاطع PBA و PCD نسبت بدایرهٔ O رسم شده است داریم :

۱) $PC\cdot PD=PB\cdot PA$

و همچنین چون دو قاطع PBA وPEF نسبت بدایرهٔ O' رسم شده است داریم :

۲) $PB\cdot PA=PE\cdot PF$

از مقایسهٔ روابط (۱) و (۲) حاصل میشود :

$$PC\cdot PD=PE\cdot PF$$

و از این رابطه نتیجه میشود که نقاط C و D و E و F روی یك دایره اند .

تمرینات

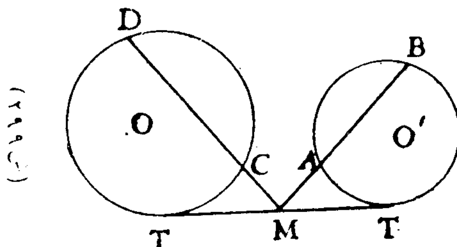
۲۳۴- تمرین شمارهٔ ۲۳۳ را با این روش حل کنید

راهنمایی - $\overline{AH}^2 = BH \cdot HC = EH \cdot HD$

۲۳۵- تمرین شمارهٔ ۲۲۵ را با این روش حل کنید

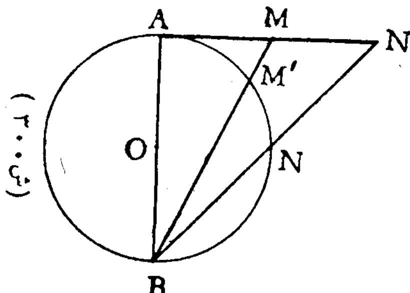
راهنمایی - $AD \cdot AB = AP \cdot AH = AE \cdot AC$

۲۳۶- ازوسط یکی‌از مماسهای مشترك دودایرهٔ متخارج



(وسط پاره‌خطی که‌بین‌نقاط تماس‌واقع‌است) دوقاطع‌رسم‌میکنیم که دایرهٔ اول‌را در A و B ودایره دوم‌را درC وD قطع‌کنند ثابت‌کنید نقاط A وB وC و Dروی یك دایره‌اند

۲۳۷ - دایریی بقطرAB را در نظر گرفته روی مماس و نقطهA بر دایره نقاط‌دلخواه M وNرا اختیار کرده فصل‌مشترك BM و BN را



با دایره بترتیب M' و N' مینامیم . ثابت‌کنید نقاط M و N و M' و N' روی یك دایره اند .

راهنمایی- $BM \cdot BM' = BN \cdot BN'$

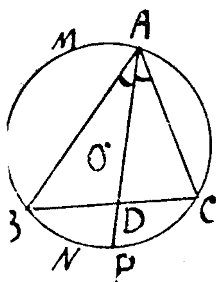
فصل هشتم

چگونه ثابت کنیم که یك خط از نقطهٔ ثابتی میگذرد؟ (۱)

۵۴- هرگاه بعضی از عناصر یك شکل‌هندسی ازحیث وضع یا کمیت ثابت و برخی متغیر یا متحرك باشند ممکن است اتفاق‌افتد که یکی از خطوط متحرك شکل همواره ازنقطهٔ ثابتی بگذرد .

مثال- در مثلث ABC فرض میکنیم دو رأس B وC ثابت و اندازهٔ زاویهٔ A نیز ثابت باشد ثابت‌کنید نیمساز زاویهٔ A ازنقطهٔ ثابتی میگذرد .

حل- چون وضع BC ثابت و مقدار زاویهٔ A نیز ثابت‌است پاره‌خط BC همواره ازنقطهٔ A بزاویه ثابت $\hat{A}$ دیده میشود بنابراین نقطهٔ A روی‌کمان BMC درخور زاویهٔ A نظیر پاره خط BC حرکت می‌کند . اگر دایرهٔ محیطی مثلث را رسم‌کنیم کمان CMB از این دایره مکان رأس A خواهد بود و اگر فصل مشترك نیمساز AD زاویهٔ A را با این دایره نقطهٔ P بنامیم دو کمان BP و PC باهم



(ش ۳۰۰)

---

(۱) این‌موضوع را در جلد دوم مفصلتر مطالعه می‌کنیم .

مساوی هستند و لذا نقطهٔ P وسط کمان BNC ثابت است و بوضع نقطهٔ A روی کمان AMC ندارد .

تبصرهٔ مهم— دراین‌قبیل مسائل‌قبل ازهرچیز باید عناصرثابت و متحرك را تعیین‌کرده تا آنجا که ممکن است مکان هندسی نقاط متحرك شکل‌را معلوم سازیم.

در مثال فوق نقــاط B و C ثابت ونقــاط A و D متحرك هستند و مقدار زاویهٔ A ثابت و کمیت بقیهٔ اجزای شکل مثلا طول AC و طول AB و زاویهٔ B و زاویهٔ C و موضع نقطهٔ D روی BC متغیرهستند. مکان نقطهٔ A کمان BMC ومکان نقطهٔ D باره خط BC می‌باشد .

۵۵ - روش‌کلی — اشکال مهمی که درحل اینگونه مسائل هست اینست‌که نقطهٔ ثابتی که خط مورد بحث از آن می‌گذرد در صورت مسئله قید نمیشود و ما باید آنرا تعیین‌کنیم برای این‌کار بهترین راه اینست‌که شکل مسئله را مطابق با معلومات مسئله با دقت‌کامل بوسیلهٔ خط‌کش وپرگار رسم کرده دو موضع مختلف از خط مورد بحث را بکشیم و وضع نقطه و فصل مشترك آنها را که همان نقطهٔ ثابت مطلوبست مورد مطالعه و دقت قرار دهیم .

پس ازآنکه وضع نقطهٔ روی شکل‌مشخص شد و دانستیم‌که نقطهٔ ثابت کدام است کافیست ثابت‌کنیم‌که این نقطه یکی از نقاط ثابت شکل است یعنی وضع آن نسبت بنقاط ثابت تغییر نمیکند یا اینکه فصل مشترك خط متحرك مورد بحث با خط یا دایرهٔ معلومی نقطهٔ ثابتی است .

مثال ۱- زاویهٔ قائمهٔ xoy را در نظـــر گرفته نقطهٔ A را روی ox و نقطهٔ B را oy طوری انتخاب میکنیم که $OA+OB=l$ باشد (l طولی‌است معلوم) و مستطیل $OACB$ را میسازیم ثابت کنید عمود CH که از C بر AB فرودآید ازنقطهٔ ثابتی میگذرد .

حل- برای آنکه وضع نقطهٔ ثابت مطلوب را بدست آوریم دو موضع مختلف از خط CH را رسم می‌کنیم و برای اینکار دو مستطیل $OACB$ و $OA'C'B'$ را مطابق با معلومـــات مسئله می‌سازیم :

$$OA + OB = OA'+OB'=l$$

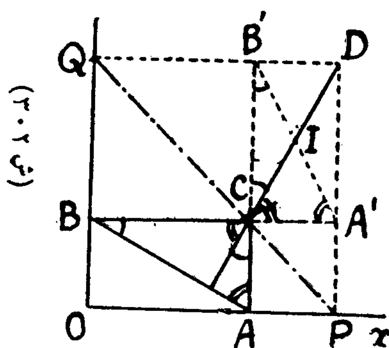
عمودهای CH و $C'H'$ که بترتیب بر AB و $A'B'$ فرود آیندیکدیگررا درنقطه‌یی مانند D قطع‌میکنند باید ثابت‌کنیم نقطهٔ D ثابت است .

(ش ۳۰۲)

حال ملاحظه میکنیم که نقطهٔ O روی ox حرکت میکند ولی فقط پاره‌خط OP از این نیم‌خط را می‌پیماید بطوریکه $OP=l$ همچنین‌نقطهٔ B روی oy پاره‌خط OQ را می‌پیماید بطوریکه $OQ=l$

بآسانی دیده میشود که نقاط P و C و Q بر یك استقامت هستند (هریك ازمثلث‌های APC و BCQ قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین هستند و زاویهٔ FCQ نیم صفحه است) یعنی‌مکان هندسی نقطهٔ C پاره‌خط PQ است .

با ترسیم شکل‌صحیح فوراً معلوم میشود که شکل OPDQ مربع است پس‌کافیست ثابت‌کنیم خط CH از نقطـهٔ D رأس چهـارم مربعی‌که سه رأس آن O و P و Q باشند میگذرند .



برای اینکار خطوط AC و BC را امتداد میدهیم تا بترتیب QD و PC را در B' وA' قطع کنند . مثلث A'CB' قرینهٔ مثلث ACB نسبت بخط PQ است و بآسانی ثابت میشود که HC از نقطهٔ I وسط A'B' و لذا از نقطـهٔ D می‌گذرد (زیرا دومثلث IBC و ICA' نیز متساوی‌الساقین هستند) .

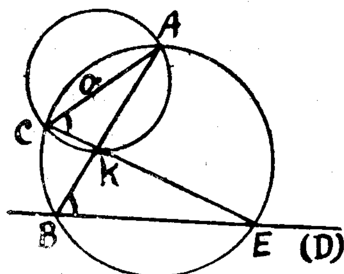
تبصره ـ درنظرگرفتن دو حکم زیر برای مسئله غالباً مفید است .

هرگاه اندازهٔ زاویه‌یی ثابت بوده رأس آن روی يك‌دایره حرکت‌کند ویکی ازاضلاعش ازنقطهٔ ثابتی متعلق باین دایره بگذرد ضلع دیگرش نیز از نقطهٔ ثابتی متعلق‌باین دایره خواهد گذشت . زیرا کمان روبروی آن ثابت است .

در هر تجانس خطی که دو نقطهٔ متجانس را بهم وصل کند ازمرکز تجانس می‌گذرد .

مثال ۲- دایرهٔ ثابت O و خط ثابت D و نقطهٔ ثابت A روی دایرهٔ O و نقطهٔ ثابت B روی خط D مفروض است دایرهٔ متغیری از A و B گذشته دایرهٔ O را از نو در نقطه‌یی مانند C و خط D را در نقطه‌یی مانند F قطع می کند . ثابت کنید خط CE از نقطهٔ ثابتی می گذرد .

حل- نقاط A و B ثابت و نقاط C و E متحرك هستند . اگر نقطهٔ A را بنقاط B و C وصل کنیم دو زاویهٔ ACE و ABE که در دایرهٔ متحرك روبرو بیك کمان مباشند متساویند امازاویهٔ ABE ثابت است (زیرا نقاط A و B و خط D ثابت هستند) پس زاویهٔ ACE زاویه‌یی است که رأسش روی دایرهٔ ثابت O حرکت‌میکند ویك ضلعش از نقطهٔ ثابتA متعلق‌باین دایره‌میگذرد پس ضلع دیگرش نیز ازنقطهٔ ثابتی متعلق باین دایره خواهدگذشت و اگر فصل مشترك CE را با دایرهٔ O نقطهٔ K بنامیم این نقطه ثابت است یعنی CE ازنقطهٔ ثابت K میگذرد .



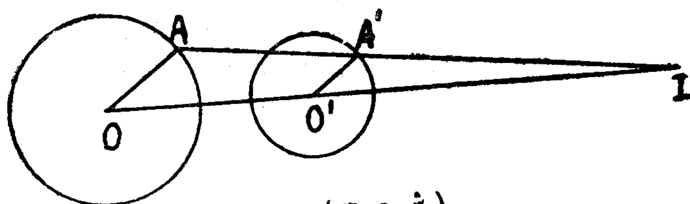
(ش ۳۰٤)

مثال۳- دو دایرهٔ O و O' را در نظرگرفته دو شعاع متوازی OA و O'A' از آنهارا دریکجهت رسم میکنیم. ثابت‌کنید وقتی‌نقطهٔ A روی دایرهٔ O حرکت کند خط AA' ازنقطهٔ ثابتی‌خواهدگذشت.

حل - خطالمرکزین دودایره خط AA' را در نقطهٔ I قطع

میکند و داریم $\frac{IO}{IO'}=\frac{OA}{O'A'}$ چون طولهای OA و O'A' ثابت هستند

پس نسبت $\frac{IO}{IO'}$ یعنی نسبت فواصل نقطهٔ I از دو نقطهٔ ثابت O و O'



(ش ۳۰۵)

تغییر نمیکند پس نقطهٔ I ثابت است .

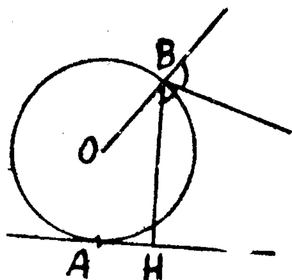
تبصرهٔ ۱ - در واقع دو دایرهٔ O و O' متجانس هستند و I مرکز تجانس مستقیم آنهاست و A و A' دو نقطهٔ متجانس میباشند پس خط AA' ازمرکز تجانس دو دایره میگذرد .

تبصرهٔ ۲- اگر دو شعاع OA و O'A' متوازی ودرخلاف جهت یکدیگر باشند خط AA' ازمرکز تجانس معکوس دودایره خواهد گذشت.

تبصرهٔ ۳- نقطهٔ I فصل مشترك دو مماس مشترك خارجی دو دایره با خط المرکزین OO' است .

تمرینات

۲۳۸- از نقطهٔ متغیر واقع بر دایرهٔ بمرکز O عمود BH را بر خط xy که در نقطهٔ ثابت A با دایره مماس است رسم میکنیم. ثابت کنید

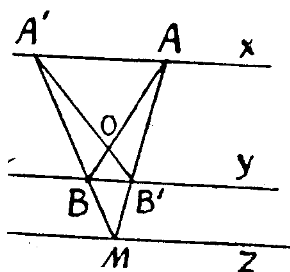


(ش ۳۰۶)

که نیمساز زاویهٔ مکمل ومجاور OBH از نقطهٔ ثابتی میگذرد
راهنمایی ـ AB نیمساز زاویهٔ OBH است .

۲۳۹- درمثلث ABC رؤس B و C و نقطهٔ I پای نیمساز داخلی زاویهٔ A است . ثابت کنید نقطهٔ J پای نیمساز خارجی زاویهٔ A وقتی رأس A حرکت کند ثابت میباشد .

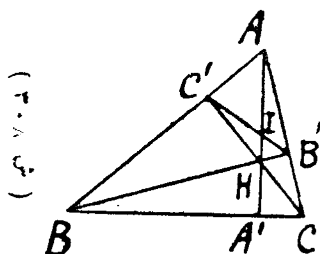
۲۴۰- سه خط متوازی ومتوالی x و y و z را درنظر گرفته نقطهٔ ثابت A را روی x ونقطهٔ ثابت B را روی y ونقطهٔ متحرك M را روی z اختیارمیکنیم خط AM خط y را در نقطهٔ B و خط BM خط x را در نقطهٔ 'A قطع میکند. ثابت کنید که وقتی M روی z حرکت کند خط 'A'B از نقطهٔ ثابتی خواهد گذشت .



(ش ۳۰۷)

راهنمایی ـ فصل‌مشترك 'A'B را با AB نقطهٔ O بنامید و ثابت کنید نسبت $\frac{OA}{OB}$ همواره ثابت است .

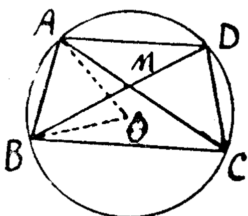
۲۴۱- ارتفاعات 'AA و'BB و 'CC ازمثلث ABC را رسم کرده نقطهٔ تقاطع آنهارا H مینامیم. 'B'C و 'AA یکدیگر را در نقطهٔ I قطع میکنند ثابت کنید اگر نقاط A و H و 'A ثابت بمانند 'B'C از نقطهٔ ثابتی می‌گذرد .



(ش ۳۰۸)

راهنمایی ـ ازمثال شمارهٔ ۲۰ صفحهٔ ۶۸ استفاده کنید.

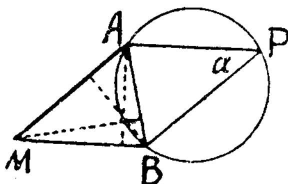
۲۴۲- ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین ABCD در دایرهٔ O محاط است ساق AB ثابت وساق CD متحرك است و اقطار AC و BD یکدیگر را در نقطه M قطع میکنند اولا ثابت کنید M همواره روی دایرهٔ محیطی مثلث AOB واقع است (تمرین ۸۴ صفحهٔ۶۳) ثانیاً ثابت کنید خطی که ازM بموازات دوقاعدهٔذوزنقه رسم شود ازنقطهٔ ثابتی مانند I میگذرد .



(ش ۳۰۹)

راهنمایی ـ نقطهٔ I روی دایرهٔ محیطی مثلث AOB واقع است .

۲۴۳- نقطهٔ ثابت P روی دایره‌یی بمرکز O واقع است . رأس زاویهٔ ثابت a در نقطهٔ P بوده این زاویه حول نقطهٔ P دوران میکند و اضلاع آن‌دایره را درنقاط A و B قطع مینمایند متوازی‌الاضلاع MABP را می سازیم .



(ش ۳۱۰)

ثابت‌کنید ارتفاعات مثلث ABM از نقطهٔ ثابتی میگذرند .

بخش سوم

مسائل مربوط بخاصیت های متری شکل‌ها

فصل اول

چگونگی اثبات رابطهٔ $a \times b = c \times d$

۵۶ـ دربعضی مسائل هندسه باید رابطه‌یی را که بیکی از دو صورت $a \times b = c \times d$ یا $\frac{m}{n} = \frac{p}{q}$ میباشد مابین اندازه‌های چهار پاره خط ثابت کنیم

ایندو رابطه گرچه ازحیث ظاهر باهم متفاوت هستند ولی هریك ازآنها را میتوان بصورت دومی نوشت

دراینجا لازم است متذکرشویم که همواره در روابط فوق اندازهٔ پاره خطها را برحسب یك واحد در نظر می‌گیریم نه خود پاره خطها را مثلا در رابطهٔ :

$$\frac{AB}{CD} = \frac{A'B'}{C'D'}$$

فرض میکنیم AB و CD و $A'B'$ و $C'D'$ اندازه های چهارپاره خط برحسب یك واحد باشند و بنابراین همواره میتوانیم رابطهٔ فوق را بصورت $AB \times C'D' = A'B' \times CD$ بنویسیم .

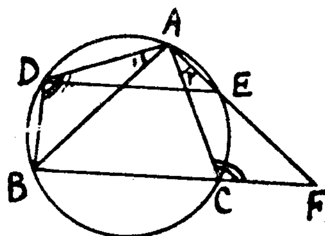
تبصره ــ اگر مقصود از AB و CD و.... خود پاره خط ها باشند دیگر حاصلضرب $AB\times C'D'$ فاقد معنی خواهد بود .

۵۷ ـ روش اول ـ بوسیلهٔ مثلثهای متشابه

از خاصیت زیر استفاده می‌کنیم :

هرگاه دومثلث متشابه باشند اضلاع متناظرآنها متناسب‌هستند.

مثال- مثلث ABC و دایرهٔ محیطی آنرا درنظر گرفته در این دایره وتر DE را بموازات ضلع BC رسم میکنیم . خط AE خط BC را در نقطهٔ F قطع میکند . ثابت‌کنید $AB\cdot AC=AD\cdot AF$



(ش ۳۱۱)

فرض: A و B و C وD وE روی یك دایره هستند
$DE \parallel BC$

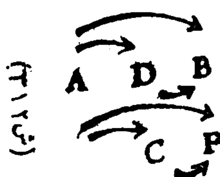
حکم: $AB\cdot AC=AD\cdot AF$

حل ـ دو زاویهٔ A_1 و A_2 که اندازهٔ آنها بترتیب $\frac{\overset{\frown}{BD}}{۲}$ و $\frac{\overset{\frown}{CE}}{۲}$ است باهم مساوی میباشند زیر دوکمان BD و CE که بین دو وتر متوازی واقع هستند متساویند . ازطرف دیگر دوزاویهٔ ACBD وACF که هردو مکمل زاویهٔ ACB ازچهارضلعی محاطی ACBD میباشند متساویند و لذا دومثلث ACF و ADB متشابه هستند و داریم :

$$\frac{AB}{AF}=\frac{AD}{AC}$$

و یا
$$AB \cdot AC = AD \cdot AF$$

تبصرهٔ مهم — وقتی‌دومثلث متشابه هستند ومیخواهیم‌نسبت بین اضلاع آنها را بنویسم بهتر است رؤس یکی از دو مثلث‌را روی یك خط افقی نوشته و رؤس متناظر آنها را از مثلث دوم زیر آنها بنویسیم در اینصورت اسامی اضلاع متناظر دو مثلث مقابل یکدیگر واقع می‌شوند و بدون آنکه احتیاج داشته باشیم بشکل مراجعه‌کنیم می توانیم نسبت ها را بنویسیم

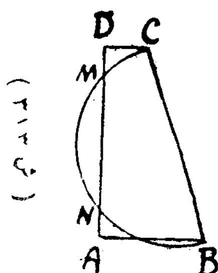


$$\frac{AD}{AC}=\frac{AB}{AF}=\frac{DB}{CF}$$

این مطلب مخصوصاً وقتی دومثلث متشابه دارای رأس مشترك نباشند و روی شکل خطوط زیادی رسم شده باشد مفید است و از اشتباه جلوگیری میکند .

تمرینات

۲۴۴ - ذوزنقهٔ قائم‌الزاویهٔ ABCD $(\hat{A}=\hat{D}=90^\circ)$ را در نظر گرفته بقطر BC نیمدایره‌یی درهمان طرف که ذوزنقه واقع است رسم و فرض میکنیم این نیمدایره ساق قائم AD را در نقاط M و N قطع کند ثابت کنید .

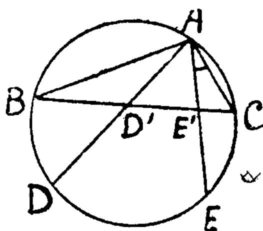


$$MD\cdot MA=AB\cdot DC$$
$$ND\cdot NA=AB\cdot DC$$

۲۴۵- ارتفاعات AA' و BB' و CC' مثلث ABC یکدیگر را در نقطهٔ H قطع میکنند ثابت کنید :

$$AA'\cdot A'H=A'C\cdot A'B$$
$$BB'\cdot B'H=B'A\cdot B'C$$
$$CC'\cdot C'H=C'A\cdot C'B$$

۲۴۶- مثلث ABC ودایرهٔ محیطی آنرا در نظر گرفته از نقطهٔ A و در داخل مثلث دو نیم خط رسم می کنیم که اولی با AB و دومی با AC دو زاویهٔ متساوی تشکیل دهند نیم خط اول BC را در D' ودایره را در D ونیم‌خط دوم BC را در E' ودایره رادر E قطع میکند ثابت کنید

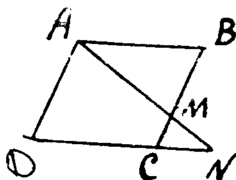


(ش ۳۱٤)

$$AB\cdot AC=AD\cdot AE'=AE\cdot AD'$$

۲۴۷- ثابت کنید حاصلضرب دو ضلع هرمثلث مساوی است با حاصلضرب قطر دایرهٔ محیطی آن در ارتفاع نظیر ضلع سوم (حالت خاصی از مسئلهٔ قبل)

۲۴۸- ازرأس A ازمتوازی الاضلاع $ABCD$ قاطعی رسم میکنیم که BC را درنقطهٔ M و DC را در نقطهٔ N قطع کند ثابت کنید $BM\cdot DN$ مساویست با حاصلضرب دو ضلع مجاور متوازی‌الاضلاع .

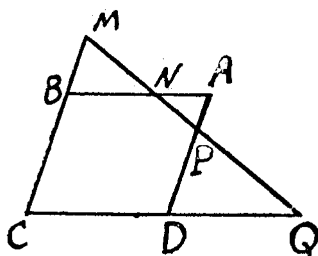


(ش ۳۱۵)

۵۸ــ ممکن است اتفاق افتدکه نتوانیم مثلثهایی روی شکل بیابیم که از تشابه آنها رابطهٔ مورد بحث نتیجه شود در اینصورت یا باید بکمك مثلث‌های متشابه رابطه‌یی بدست آوریم وبا بکاربردن خاصیت‌های تناسب آن رابطه را تغییر دهیم تا رابطهٔ منظور حاصل شود یا اینکه ثابت کنیم که دوطرف تساوی مورد بحث دارای یك مقدار مشترك میباشند .

مثال‌ـ خط قاطعی اضلاع متوازی‌الاضلاع ABCD یا امتداد آنها را قطع میکند : AB را در N و AD را در P و BC را در M و CD را در Q ثابت کنید که :

$$\frac{MN}{MP}=\frac{NB}{AB}$$



(ش ۳۱۶)

حلــ چهار پاره خط که در رابطهٔ فوق هستند روی شکــل اضلاع هیچ مثلثی نمیتوانندباشند ولی از دومثلث متشابه BMN و APN حاصل میشود .

$$\frac{NM}{NP}=\frac{BN}{AN}$$

و چون در مخرج ترکیب صورت ومخرج کنیم داریم

$$\frac{NM}{NP+NM}=\frac{BN}{AN+BN} \qquad (۱)$$

و از روی شکل واضح است که $EP+NM=MP$

$(a \times b = c \times d$

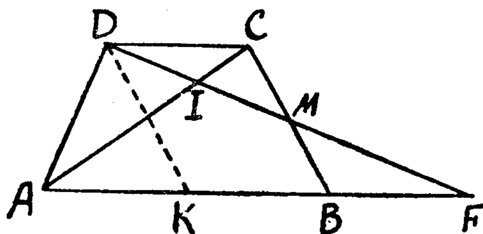
و $AN+BN=AB$ و بنابراین رابطهٔ (۱) بصورت زیر درمیآید :

$$\frac{NM}{MP}=\frac{BN}{AB}$$

و حکم ثابت است .

تمرینات

۲۴۹- در ذوزنقهٔ ABCD قاعدهٔ کوچکتر DC وقاعدهٔ بزرگتر AB میباشد و قطر AC از نقطهٔ I وسط پـاره خط DM که رأس D را بوسط BC وصل میکند میگذرد و خط



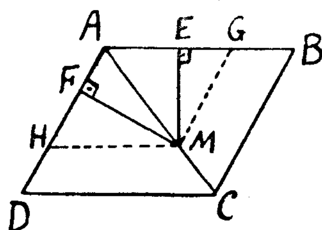
(ش ۳۱۷)

DM خط AB را درنقطهٔ F قطع میکند ثابت کنیدکه

$$\frac{DI}{MF}=\frac{CD}{AB}$$

راهنمایی ـ از نقطهٔ D خطی بموازات CB رسم کنید تا AC را در H و AB را در K قطع کند H وسط AC و K وسط AB است و مقدار مشترك دو طرف تساوی فوق $\frac{1}{2}$ است .

۲۵۰ - درمتوازی الاضلاع ABCD نقطهٔ M را روی

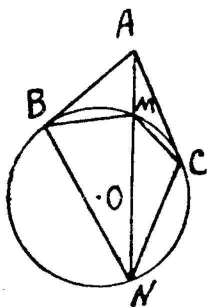


(ش ۳۱۸)

قطر AC اختیار کرده عمود ME را بر AB و عمود MF را بر AD فرود میآوریم ثابت کنید

$$\frac{ME}{MF}=\frac{AD}{AB}$$

راهنمایی ــ از N خطوط MG و MH را بترتیب بموازات AD و AB رسم کرده مثلثهای MGE و MHF و سپس AMG وACB را درنظر بگیرید .



(ش ۳۱۹)

۲۵۱- ازنقطهٔ A واقع در خارج دایرهٔ O مماسهای AB و AC و قاطع AMN را نسبت بآن رسم می‌کنیم و چهار ضلعی BMCN را میسازیم ثابت کنید که حاصلضرب دو ضلع متقابل این چهارضلعی مساوی با حاصل ضرب دوضلع دیگر است .

راهنمایی ـ رابطه را بشکل یك تناسب بنویسید بطوریکه مقدارمشترك دونسبت‌مساوی با نسبت طول‌مماس به AM باشد.

۲۵۲ - در مسئلهٔ قبل از A عمود AH را بر MB و عمود AG را بر MC فرود می‌آوریم ثابت کنیدکه :

(۲۲۰ ۹۰)

$$\frac{AH}{AG} = \frac{BM}{CM}$$

راهنمایی- ازنقطهٔ N عمودی بر BC فرود آورید و از مسئلهٔ قبل استفاده کنید .

۵۹ - روش دوم - با استفاده از دوقضیهٔ زیر :

قضیهٔ ۱ - نیمساز داخلی هرزاویهٔ مثلث ضلع روبرو را بدو پاره خط که با اضلاع مجاور خود متناسب هستند تقسیم می کند (تقسیم اضافی)

قضیهٔ ۲ - نیمساز خارجی زاویهٔ هرمثلث ضلع روبرورا بدو پاره خط که با اضلاع مجاور خود متناسب هستند تقسیم می کند (تقسیم نقصانی)

(رجوع کنید بکتاب هندسهٔ سال سوم)

(۲۲۱ / ۹۰)

$$\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}$$

$$\frac{D'B}{D'C} = \frac{AB}{AC}$$

مثال- در دو مثلث ABC و DEF دو زاویهٔ A و D باهم مساوی و دو زاویهٔ C و E مکمل یکدیگرند . ثابت‌کنید که اضلاع مقابل بزوایای متساوی بااضلاع مقابل‌بزوایای مکمل‌متناسب میباشند

فرض
$$\left.\begin{array}{l}\hat{A}_1 = \hat{D} \\ \hat{C}_1 + \hat{E} = 180^\circ\end{array}\right\}$$

حکم :
$$\frac{AB}{BC} = \frac{DF}{EF}$$

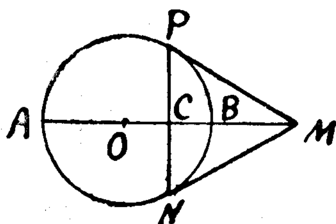
حل- از نقطهٔ A خطی درخارج مثلث ABC رسم میکنیم که با AC زاویه‌یی مساوی با D تشکیل دهد :($\hat{A}_1 = \hat{A}_2 = D$) این خط امتداد BC را در نقطهٔ G قطع میکند . در مثلث ABG خط AC نیمساز است و داریم $\frac{AB}{BC} = \frac{AG}{CG}$

اما $\hat{C}_1 + \hat{C}_2 = 180^\circ$ پس $\hat{C}_2 = \hat{E}$ پس دو مثلث ACG و DEF متشابهند و داریم $\frac{AG}{CG} = \frac{DF}{EF}$ از دو رابطهٔ اخیر حاصل میشود

$$\frac{AB}{BO} = \frac{DF}{DE}$$

تمرینات

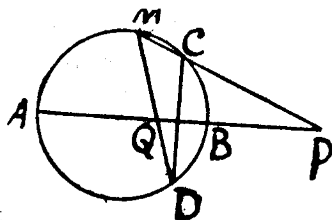
۲۵۳- دایره‌یی بقطر AB و نقطهٔ M روی خط AB و در خارج دایره مفروض است. از نقطهٔ M دو مماس MN و MP را بر دایره رسم کرده N را به P وصل میکنیم تا AB را در C قطع کند



(ش ۳۲۳)

ثابت کنید $\frac{CA}{CB}=\frac{MA}{MB}$

۲۵۴- دایره‌یی بقطر AB و وتر CD عمود بر AB مفــروض است . نقطهٔ M را روی دایره اختیار کرده خطــوط MC و MD را رسم می‌کنیم تا خط AB را بترتیب درنقاط P و Q قطع کند



(ش ۳۲٤)

ثابت کنید $\frac{PA}{PB}=\frac{QA}{QB}$

۲۵۵- مثلث ABC در دایرهٔ O محاط است . قطــر MN را عمود بر ضلع BC رسم کرده خطوط AM و AN

را میکشیم تا خط BC را درنقاط P و Q قطع کنند ثابت کنید :

$$\frac{PB}{PC}=\frac{QB}{QC}$$

(ش ۳۲۵)

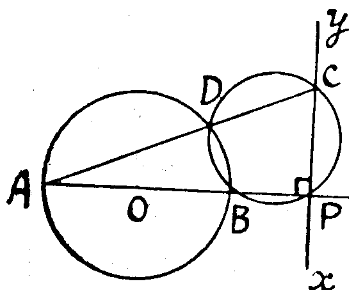
۲۵۶ - دایره‌یی بقطر AB را درنظر گرفته وتر CD را عمود بر AB رسم‌میکنیم اگر E نقطهٔ دلخواهی از وتر CD باشد و خطوط AE و BE دایره را بترتیب درنقاط F و G قطع‌کنند ثابت کنید که نسبت دو ضلع متوالـی چهارضلعی CFDG مساوی با نسبت دوضلع‌دیگراست.

(ش ۳۲۶)

۶۰ - روش سوم - با استفاده از قوت نقطه نسبت بدایره

مثال- از نقطهٔ P واقع روی قطر AB از دایرهٔ O عمودی بر این قطر اخراج کرده روی آن نقطـهٔ دلخواه C را اختیار میکنیم . خط CA دایره را در نقطهٔ D قطع میکند ثابت‌کنید :

$$AB \cdot AP = AD \cdot AC$$



(ش ۳۲۷)

فرض: AB قطر دایره و نقطهٔ C روی آن واقع است $xy \perp AB$

حکم : $AB \cdot AP = AD \cdot AC$

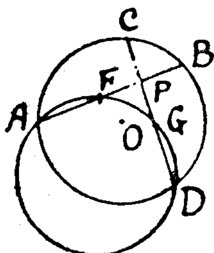
حل ـ زاویهٔ P بنا بفرض قائمه است و زاویهٔ CDB نیز قائمه میباشد زیرا زاویهٔ محاطی ADB روبرو بقطر AB قائمه است. پس چهار ضلعی $BDCP$ که دو زاویهٔ روبروی آن مکمل یکدیگرند محاطی است. قوت نقطهٔ A نسبت بدایرهٔ محیطی این چهارضلعی عبارتست از : $AB \cdot AP = AD \cdot AC$ و حکم ثابت.

تمرینات

۲۵۷ ـ در دایرهٔ O دو وتر دلخواه AB و CD را رسم میکنیم تا یکدیگر را در نقطهٔ P قطع کنند و روی خط AB قرینه نقطهٔ B را نسبت به P نقطهٔ F مینامیم و ازنقاط D و A و F یکدایره میگذرانیم. این دایره CD را در نقطهٔ G قطع میکند. ثابت کنید :

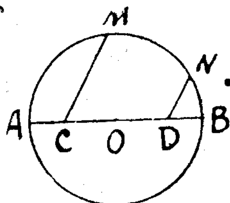
$$PC \times PD = PD \times PG$$

ونوع چهارضلعی $ABGF$ رامشخص نمایید.



(ش ۳۲۸)

۲۵۸ - روی قطر AB از دایرهٔ O دو نقطهٔ C و D را بیك فاصله از O اختیار می‌کنیم و از این دو نقطه و دریك طرف AB دو خط متوازی رسم میکنیم تا دایره را در نقاط M و N قطع کنند ثابت کنید :



(ش۳۲۹)

$$CM \times DN = CA \times CB = DA \times DB$$

۲۵۹- ارتفاعات مثلث ABC یکدیگر را در نقطهٔ H قطع میکنند ثابت کنید :

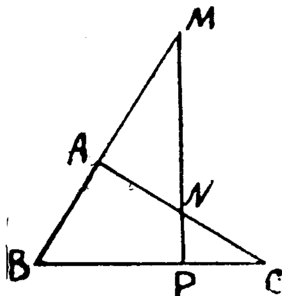
$$AH \times A'H = AB' \times AC = AC' \times AB$$

۲۶۰- ارتفاعات مثلث ABC یکدیگر را در نقطهٔ H قطع میکنند ثابت کنید :

$$AH \times A'H = BH \times B'H = CH \times C'H$$

راهنمایی- طرفین تساوی‌های فوق را در ۲ ضرب کرده از مثال ۲ شمارهٔ ۹ صفحهٔ ۱۸ استفاده کنید .

۲۶۱ - از نقطهٔ P واقع روی وتر BC از مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC عمودی براین وتر اخراج میکنیم تا AC را در N و AB را در M قطع کند ثابت کنید :

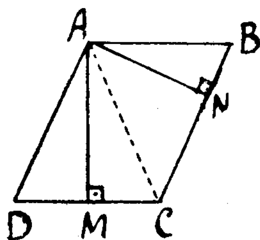


(ش ۳۳۰)

$$BA\cdot BM=BP\cdot BC$$
$$NA\cdot NC=NM\cdot NP$$
$$MA\cdot MB=MN\cdot MP$$

۶۱ ــ روش چهارم ــ بوسیلهٔ مساحت شکلهای معادل

مثال ــ از رأس A از متوازی الاضلاع ABCD عمودهای AM و AN را بترتیب بر اضلاع مجاور CD و CB فرود میآوریم ثابت کنید :
$$AM\times CD=AN\times CB$$



(ش ۳۳۱)

فرض:
$$\left.\begin{array}{l}AB \parallel DC\\ AD \parallel BC\\ AM \perp DC\\ AN \perp BC\end{array}\right\}$$

حکم: $AM\times CD=AN\times CB$

حل ــ قطر AC متوازی‌الاضلاع را بدو مثلث متساوی و بنابراین متعادل تقسیم میکند مساحت مثلث ADC مساویست با $\frac{1}{2}\ AN\times BC$ و مساحت مثلث ABC مساویست با $\frac{1}{2}\ AN\times BC$

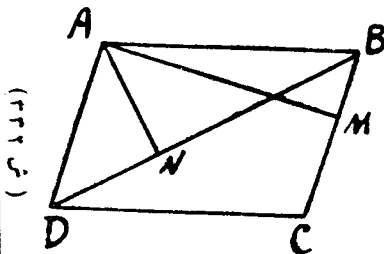
و چون این دو مساحت متساویند داریم :
$$AM\times CD=AN\times CB$$

تمرینات

۸

۲۶۲- در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC ($A=90^\circ$) ارتفاع AH را رسم میکنیم ثابت کنید $AB\times AC=BC\times AH$

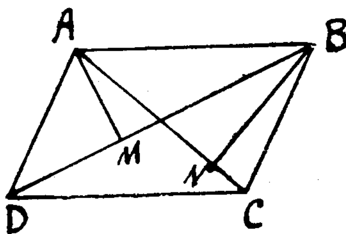
۲۶۳ - در متوازی‌الاضلاع ABCD از رأس A عمود AM را بر ضلع BC و عمود AN را بر قطر BD فرود می آوریم ثابت کنید :



(ش ۳۳۲)

$$AM\times BC=AN\times BD$$

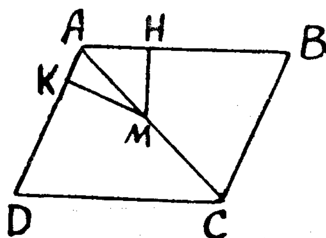
۲۶۴- ازدورأس A و B متوازی ـ الاضلاع ABCD عمود های AM و BN را بترتیب بر قطرهای BD و AC فرود می‌ـ آوریم ثابت کنید



(ش ۳۳۳)

$$AM\times BD=AC\times BN$$

۲۶۵- در متوازی‌الاضلاع ABCD از نقطهٔ M واقع



بر قطر AC عمودهای MH و MK را بترتیب بر اضلاع AB و AD فرود میآوریم ثابت کنید

$MH \times AB = MK \times AD$

(ش ۳۳٤)

راهنمایی - دومثلث AMB و AMD باهم معادل‌هستند

فصل دوم

چگونگی اثبات رابطهٔ $a^2 = b \times c$

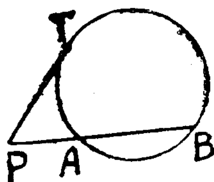
۶۲ــ این رابطه را میتوان بصورت $\frac{a}{b} = \frac{c}{a}$ نوشت وبنابراین روش اثبات آن مثل روش اثبات رابطهٔ $a \times b = c \times d$ است که درفصل اول ذکر کردیم .

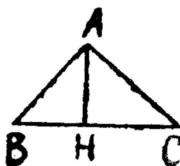
گذشته از آنچه درفصل اول بیان کردیم برای اثبات رابطهٔ مزبور میتوان ازقضایای زیر نیز استفاده کرد

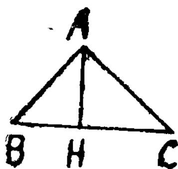
در هر مثلث قائم‌الـزاویه ارتفاع نظیر وتر واسطهٔ هندسی است مابین دوپاره خطی که بوسیلهٔ پای ارتفاع روی وتر پدید میآید (ش ۳۳۵) .

در هرمثلث قائم‌الزاویه هریك از اضلاع زاویهٔ قائمه واسطهٔ هندسی است مابین وتر و تصویرش بر وتر (ش ۳۳۶) .

اگر از نقطهٔ P واقع در خارج دایرهٔ O مماس PT و قاطع PAB را نسبت بآن رسم کنیم طول مماس PT واسطهٔ هندسی است مابین PA و PB (ش ۳۳۷) ــ قوت نقطه .







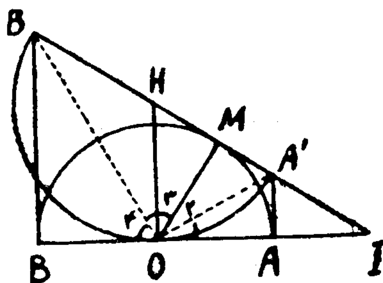
$\overline{PT}^2 = PA \cdot PB$ (ش۳۳۷)

$\overline{AB}^2 = BC \times BH$
$\overline{AC}^2 = BC \times CH$ (ش۳۳۶)

$\overline{AH}^2 = BH \cdot CH$ (ش۳۳۵)

مثال- نیمدایره‌یی بقطر AB و بمرکز O را در نظر گرفته از نقطهٔ اختیاری M واقع بر این نیمدایره مماسی بر آن رسم میکنیم تا مماسهای در A و B را در 'A و 'B و قطر AB را در I قطع کند. ثابت کنید

$AA' \cdot BB' = R^2$ و $\overline{IO}^2 = IA' \cdot IB'$



(ش۳۳۸)

حل ــ O را بنقاط 'A و M و 'B وصل میکنیم زاویهٔ 'B'OA قائمه است زیرا :

$\hat{O}_1 = \hat{O}_2$ و $\hat{O}_3 = \hat{O}_4$

پس :

$A'\hat{O}B' = \hat{O}_2 + \hat{O}_3 = 90^\circ$

بنابراین درمثلث قائم‌الزاویهٔ 'A'OB میتوان نوشت :

$\overline{OM}^{2}=MA'\times MB'$ (OM ارتفاعاست)

اما $MA'=AA'$ و $MB'=BB'$ و $OM=R$

پس رابطهٔ فوق باینصورت درمیآید :

$$R^{2}=AA'\times BB'$$

(ونیز میتوان این رابطه را از تشابه دو مثلث OAA' و $OB'B$ نتیجه گرفت).

برای اثبات رابطهٔ $\overline{IO}^{2}=IA'\times IB'$ ملاحظه میکنیم که دایرهٔ محیطی مثلث $A'OB'$ درنقطهٔ O' با AB مماس است زیرا چون زاویهٔ $A'OB'$ قائمه است مرکز این دایره نقطهٔ H وسط $A'B'$ میباشد و واضحاست که درذوزنقهٔ قائم‌الزاویهٔ $AA'BB'$ خط OH که اوساط دوساق را بهم وصل کرده با دو قاعدهٔ AA' و BB' موازی و بنابراین بر AB عموداست .

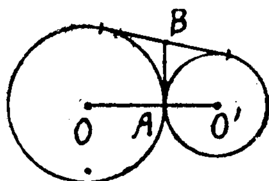
حال اگر قوت نقطهٔ I را نسبت باین دایره بنویسیم حاصل می‌شود :

$$\overline{IO}^{2}=IA'\times IB'$$

(این رابطه را نیز میتوان ازتشابه دومثلث IOA' و $IB'O$ نتیجه گرفت)

تمرینات

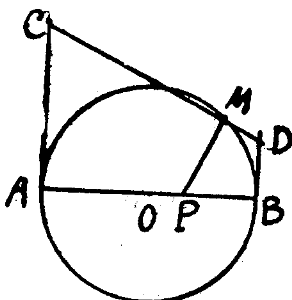
۲۶۶- دودایره بشعاعهای R و R' در نقطهٔ A مماس خارج‌هستند. مماس‌داخلی ویکی از دومماس خارجی آنهارا رسم می کنیم تا یکدیگر را در نقطهٔ B قطع کنند. ثابت کنید AB واسطهٔ هندسی است مابین دوشعاع R و R' .



(ش ۲۳۹)

۲۶۷- دایره‌یی بقطر AB را درنظرگرفته نقطهٔ P را روی

$(a^2 = b \times c$



(ش ۳٤۰)

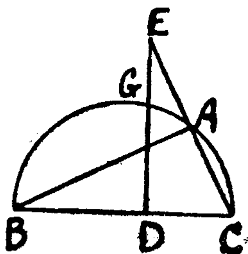
قطر AB و نقطهٔ M را روی دایره اختیار میکنیم و از M عمودی بر MP اخراج میکنیم تا مماسهای در A و B بر دایره را درنقاط C و D قطع کند. ثابت کنید :

$$\overline{MP}^2 = MC \cdot MD$$

راهنمایی ــ ازخاصیت های چهارضلعی محاطی استفاده کرده ثابت کنید زاویهٔ CPD قائمه است .

۲٦۸- هرگاه در ذوزنقهٔ قائم الزاویه یی قطرها برهم عمود باشند ارتفاع واسطهٔ هندسی است ما بین دو قاعده (۱ح : ۳۵۵)

۲٦۹- مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC را در نظر گرفته از نقطهٔ D واقع بر وتر BC عمودی بر آن اخراج میکنیم تاخط AC را در E و خط AB را در F و نیمدایرهٔ محیط برمثلث را در G قطع کند ثابت کنید :



(ش ۳٤۱)

$$\overline{DG}^2 = DF \cdot DE$$

راهنمایی ــ دومثلث BDF و EDC متشابهند .

۲۷۰- مثلث متساوی‌الساقین ABC (AB=AC) را در نظر گرفته ارتفاع CD را رسم میکنیم وقرینهٔ نقطهٔ D را نسبت بنقطهٔ A نقطهٔ E مینامیم ثابت کنید .

$$\overline{CD}^2 = BD \times BF$$

راهنمایی - قوت نقطهٔ B نسبت بدایرهٔ بقطر FD با قوت نقطهٔC نسبت باین‌دایره‌مساویست

(ش۳٤۲)

۲۷۱- دایره‌یی بقطر AB مفروض است وتر دلخواه AC ونیمساززاویهٔ CAB را رسم‌میکنیم. این‌نیمساز وتر BC را درنقطهٔ F و دایره را در نقطهٔ H و مماسی را که بردایره در نقطهٔ B رسم شود در نقطهٔ D قطع میکند ثابت‌کنید

$$\overline{BF}^2 = DA \times DH$$

(ش۳٤۳)

(بتمرین شمارهٔ ۱۲ صفحهٔ ۲۰ مراجعه‌کنید)

۲۷۲- مثلث ABC در دایرهٔ بمرکز O محاط است . نیمساز زاویهٔ A ضلع BC را در نقطهٔ D و دایره را در

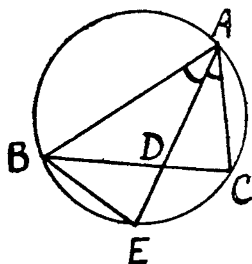
$(a^2 = b \times c$

نقطهٔ E قطع مـی‌کند .

ثابت‌کنید :

$\overline{BE}^2 = ED \times EA$

راهنمایی - دومثلث EAC و ECD متشابهند ونیز میتوان ثابت‌کردکه دایرهٔ محیطی مثلثADC با EC مماس است .



(ش۳٤٤)

پایان